UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 3: Matrizes - Parte II

Ementa: Multiplicação de matrizes; transposição de matrizes; matrizes inversas.
Objetivos: Entender a operação de multiplicação de matrizes e utilizá-la para entendimento e determinação de inversas de matrizes.

1 Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n\times p}$, chamamos de **produto** de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ a matriz $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m\times p}$, onde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Exemplo 1 *Dadas as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *abaixo, determine* $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Solução:
Antes de realizar o produto entre as duas matrizes, note que o número de colunas de $\mathbf{A}$ *é igual ao número de linhas de* $\mathbf{B}$. *Portanto, com essa condição satisfeita pode-se realizar o produto entre as matrizes e determinar* $\mathbf{C}$*:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Desta forma, note que a ordem de $\mathbf{C}$ *é* 3×2.

Exemplo 2 *Sendo as matrizes* $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}_{1\times 4}$ *e* $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2}$*, determine se possível:*

1. $\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$;
2. $\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$.

Solução:

1. *Temos que* $\mathbf{D}$ *tem quatro colunas e* $\mathbf{E}$ *tem quatro linhas, logo podemos efetuar a multiplicação.*
   $\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} (1\cdot 4) + (2 \cdot 0) + (3 \cdot 3) + (9 \cdot 5) & (1 \cdot (-1)) + (2 \cdot 1) + (3 \cdot 7) + (9 \cdot 4) \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 4 + 0 + 9 + 45 & -1 + 2 + 21 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 58 \end{pmatrix}$

2. *Temos que* $\mathbf{E}$ *tem duas colunas e* $\mathbf{D}$ *uma linha, logo não podemos efetuar a multiplicação entre as duas matrizes, portanto não é possível calcular* $\mathbf{G}$.

1.1 Propriedades

A multiplicação de matrizes satisfaz algumas propriedades que serão listadas a seguir. Dadas as matrizes $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{n\times p}$ e $D_{p\times k}$, temos:

- $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ (elemento neutro ou identidade);
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributiva à esquerda da multiplicação);
- $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$ (distributiva à direita da multiplicação);
- $(A \cdot B) \cdot D = A \cdot (B \cdot D)$ (associatividade);
- $0_m \cdot A = 0_{m\times n}$ e $A \cdot 0_n = 0_{m\times n}$.

2 Transposição de matrizes

Dada uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, chamamos de **matriz transposta de A** a matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de ordem $n \times m$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Indicamos a matriz transposta de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^t$.

Exemplo 3 *Encontre a transposta da matriz* $\mathbf{H}$.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

Solução: *Como mencionado na definição de transposição de matrizes acima, teremos que* $h_{ij} = h_{ji}$, *logo:*

$$\mathbf{H^t} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 *Considere as matrizes:*

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -20 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se possível, determine $\mathbf{L} = [\mathbf{I}^t + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{K}$.

Solução:
Para resolver a expressão acima, deve-se obedecer a ordem das operações, ou seja, deve-se resolver primeiro o que se encontra dentro dos colchetes e logo após o produto. Além disso, é importante se atentar para a condição que há tanto na adição de matrizes como no produto, se satisfizer as mesmas será possível definir $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}^t + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{K} = \left[\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -20 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 13 & -14 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 8 + 7 \cdot 9 & (-2) \cdot 7 + 7 \cdot 2 \\ 13 \cdot 8 + (-14) \cdot 9 & 13 \cdot 7 + (-14) \cdot 2 \\ 0 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 0 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -16 + 63 & -14 + 14 \\ 104 - 126 & 91 - 28 \\ 0 + 27 & 0 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 0 \\ -22 & 63 \\ 27 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1 Propriedades

Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e o número real a, a transposição de matrizes satisfaz:

- $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- $(a \cdot A)^t = a \cdot A^t$;
- $(A \cdot B)^t = B^t A^t$;
- $(A^t)^t = A$.

Das definições de matriz simétrica e matriz antissimétrica, segue que

$$A \quad \text{é matriz simétrica} \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A;$$

$$B \quad \text{é matriz antissimétrica} \quad \Leftrightarrow \quad B^t = -B.$$

3 Operações elementares com matrizes

Podemos fazer três operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

- Permutação da $i-$ésima e $j-$ésima linhas, que denotamos por $L_i \leftrightarrow L_j$.
  Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Multiplicação da $i-$ésima linha por um escalar não nulo k, que denotamos por $(L_i \to k \cdot L_i)$.
  Exemplo: $L_2 \to 2 \cdot L_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Substituição da $i-$ésima linha pela $i-$ésima linha mais k vezes a $j-$ésima linha, que denotamos por $(L_i \to L_i + k \cdot L_j)$.
  Exemplo: $L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2+2\cdot 0 & 0+2\cdot 2 & 4+2\cdot(-3) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2+0 & 0+4 & 4-6 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Matriz inversa

Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é **inversível (ou invertível)** se existe uma matriz B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Neste caso, dizemos que a matriz B é a **inversa** de A e a denotamos por A^{-1}.

Alguns fatos seguem direto da definição acima:

- Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $BA = I$, então A é inversível e $A^{-1} = B$;
- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem inversíveis, então AB é inversível e, além disso, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- Nem toda matriz é inversível.

Exemplo 5

Dado a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, *temos que a sua inversa é* $\mathbf{M^{-1}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.1 Método para inversão de matrizes

Um procedimento prático para obtenção de uma matriz inversa, quando esta existir, consiste em efetuar operações elementares nas linhas de uma matriz dada até obtermos a matriz identidade. Caso isso seja possível a matriz dada é inversível e para obtermos a inversa basta aplicarmos a mesma sequência de operações elementares nas linhas da matriz identidade.

Em resumo, fazemos a sequência de operações elementares simultaneamente numa matriz A dada e na matriz identidade I de mesma ordem que A. Quando no lugar de A tivermos a matriz identidade, então no lugar de I teremos a matriz inversa de A.

$$[A \ \vdots \ I] \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\text{operações elementares}} \quad [I \ \vdots \ A^{-1}]$$

Exemplo 6 *Verifique se* $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *é inversível.*

Solução: *Utilizando o método para inversão de matrizes mencionado acima,teremos:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to L_2 + 2 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + 3 \cdot L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to \frac{1}{9} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to L_3 - 12 \cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to \frac{1}{9} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 3 \cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\therefore \mathbf{N^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 *Verifique se a matriz* $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ *e a matriz* $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ *são inversas entre si.*

Solução: *Para que seja verdade* $\mathbf{O} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$*, basta verificar.*

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-5) + 8 \cdot \frac{9}{2} & 7 \cdot 4 + 8 \cdot -\frac{7}{2} \\ 9 \cdot (-5) + 10 \cdot \frac{9}{2} & 9 \cdot 4 + 10 \cdot -\frac{7}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -35 + 36 & 28 - 28 \\ -45 + 45 & 36 - 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

$\therefore$ $\mathbf{O}$ *e* $\mathbf{P}$ *são inversas entre si.*

Exemplo 8 *Verifique se a matriz* $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *é inversível.*

Solução: *Utilizando o método para inversão de matrizes, teremos:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\therefore$ *Note que não foi possível encontra uma* $\mathbf{I}_2$ *no lugar de* $\mathbf{Q}$*, portanto não é inversível.*

5 Exercícios

(1) Sejam as matrizes $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \\ 16 & -10 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 0 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{Y}$ que verifica a igualdade $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

(2) Considere as matrizes:

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 20 & 9 \\ -19 & 54 & 32 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 97 & 54 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -4 & 24 & 41 \\ 65 & 25 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Quando possível, calcule o que se pede.

(a) $2\mathbf{D} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{H}$;

(b) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{E}$;

(c) $\mathbf{D} \cdot 5\mathbf{H} + \mathbf{G} \cdot (-3)\mathbf{F}$;

(d) $\mathbf{I_3} \cdot \mathbf{E}$.

(3) Sejam as matrizes $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ definidas no exercício (2), verifique as seguintes propriedades da transposta:

(a) $(\mathbf{G} + \mathbf{H})^t = \mathbf{G}^t + \mathbf{H}^t$;

(b) $(2 \cdot \mathbf{D})^t = 2 \cdot \mathbf{D}^t$;

(c) $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{F})^t = \mathbf{F}^t\mathbf{E}^t$;

(d) $(\mathbf{D}^t)^t = \mathbf{D}$.

(4) Dada a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{M^t}$ a transposta de $\mathbf{M}$, determine $\mathbf{J}$, tal que $\mathbf{J} = \mathbf{M^2} - \mathbf{M^t}$.

(5) Use o método para inversão de matrizes para determinar se as matrizes abaixo são inversíveis.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -12 \\ 6 & 0 & 4 \\ 12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) Sejam as matrizes $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, calule:

(a) $\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}$;

(b) $\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}$;

(7) Seja a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

(a) $\mathbf{M}^{-1}$;

(b) $(\mathbf{M}^{-1})^{-1}$;

(c) $\mathbf{M}^t$;

(d) $(\mathbf{M}^t)^{-1}$;

(e) $(\mathbf{M}^{-1})^t$

(8) Seja $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 10 & x^2 \\ 2x-1 & 30 \end{pmatrix}$. Determine o valor de x, tal que $\mathbf{N} = \mathbf{N}^t$.

(9) Sejam as matrizes $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 50 & 9 \\ 13 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -3 & 19 \\ 25 & 7 \\ 69 & 5 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{X}$ que verifica a igualdade $\mathbf{X} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q^t}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O^{-1}})$.

(10) Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

( ) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^t$ também será uma matriz triangular superior;

( ) Se $\mathbf{B}$ é uma matriz trinagular inferior, então $\mathbf{B}^t$ será uma matriz triangular superior;

( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica;

( )Se a primeira coluna de $\mathbf{C}$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$;

( ) Sejam as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ simétricas, então $\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}$;

( ) Dadas as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, de ordem n, então $-\mathbf{G} \cdot -\mathbf{H} = -(\mathbf{G} \cdot \mathbf{H})$;

( ) Se a primeira linha de $\mathbf{I}$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.