UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 1: Espaços vetoriais reais

(1) Dado n um inteiro positivo, seja $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n de uma variável com coeficientes reais. Mostre que $P_n(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(2) Dados $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (3ax_1, 3ay_1).$$

Mostre que com essas operações, $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(3) Dados $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1).$$

(a) Mostre que com essas operações vale a associatividade da adição em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que com essas operações vale a comutatividade da adição em $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine um elemento neutro da adição definida em $\mathbb{R}^2$.

(d) Mostre que nem todo elemento de $\mathbb{R}^2$ terá um elemento oposto (simétrico) com a adição definida e conclua que com as operações dadas, $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(4) Dados $a, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{R}$, considere as seguintes operações definidas em $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$$

$$a(x_1, y_1, z_1) = (ax_1, ay_1, az_1).$$

Mostre que com essas operações, $\mathbb{R}^3$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(5) Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações abaixo é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1),$$

para quaisquer $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

(6) Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações abaixo é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (a^2 x_1, a^2 y_1),$$

para quaisquer $a, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

(7) Sejam a um número real e v um elemento de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V. Mostre que, se $av = 0$ então $a = 0$ ou v é o vetor nulo de V.

(8) Seja v um elemento não nulo de um espaço vetorial real V. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & V \\ a & \longmapsto & av \end{array}$$

é injetora.