**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS**
**Disciplina: *Álgebra Linear II***
**Prof. *Victor Martins***

---

# Prova 2 - 07/05/2019

*(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)*

Nome:________________________________________________Matrícula:__________

**Questão 1:**

(a) *(0,5 pontos)* Defina transformação linear.

(b) *(1,0 ponto)* Mostre que $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{R})$, $T(A) = AB - BA$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ fixa é uma transformação linear.

**Questão 2:** Sejam $U, V$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$.

(a) *(0,5 pontos)* Defina o núcleo $N(T)$ da transformação $T$.

(b) *(1,0 ponto)* Mostre que $N(T) \leq U$.

(c) *(0,5 pontos)* Defina a imagem $Im(T)$ da transformação $T$.

(d) *(1,0 ponto)* Mostre que $Im(T) \leq V$.

**Questão 3:** Seja $T : U \to V$ uma transformação linear entre espaços de dimensão finita.

(a) *(0,5 pontos)* Enuncie o Teorema do Núcleo e da Imagem.

(b) *(1,0 ponto)* Demonstre, se a afirmação for verdadeira **(V)**, dê um contraexemplo, se for falsa **(F)**.

(i) ( ) Se $T$ for injetiva, então $\dim U \leq \dim V$.

(ii) ( ) Se $\dim U \leq \dim V$, então $T$ será injetiva.

(iii) ( ) Se $T$ for sobrejetiva, então $\dim V \leq \dim U$.

(iv) ( ) Se $\dim V \leq \dim U$, então $T$ será sobrejetiva.

**Questão 4:** Sejam $U, V$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Prove que:

(a) *(1,0 ponto)* $V_0 \leq V \Rightarrow T^{-1}(V_0) \leq U$;

(b) *(1,0 ponto)* $S \subset V$ l.i. $\Rightarrow T^{-1}(S)$ é l.i.

**Questão 5:** Sejam $V = M_n(\mathbb{C})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Consideremos os subconjuntos de $V$, $V_1 = \{A \in V : A^t = A\}$ e $V_2 = \{A \in V : A^t = -A\}$. Mostre que:

(a) *(1,0 ponto)* $V_1$ e $V_2$ são subespaços vetoriais.

(b) *(1,0 ponto)* $V = V_1 \oplus V_2$.

**Questão extra:** *(5,0 pontos)*

*"Se $U$ e $V$ são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais com $\dim U = n$ e $\dim V = m$ então $\mathfrak{L}(U, V) \approx M_{m \times n}(\mathbb{K})$."*

Disserte sobre a afirmação acima.

**BOA PROVA!**