UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: ***Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II***
Prof. ***Victor Martins***

Gabarito - Teste 2 - 23/10/2018

Questão 1:

(a) Um ponto crítico de uma função de duas variáveis $f(x,y)$ é dito um **ponto de sela** se ele não for um ponto de máximo e nem de mínimo local de f.

(b) Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais. Dizemos que $f(a,b)$ é **valor mínimo absoluto** de f se $f(x,y) \geq f(a,b)$ para quaisquer pontos (x,y) no domínio da função f.

(c) **Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis:** Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1,y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2,y_2)$ em alguns pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) de D.

Questão 2: Vamos utilizar o teste da derivada segunda para determinar e classificar os pontos críticos de

$$f(x,y) = y\cos x.$$

Calculando as derivadas parciais de f e o determinante da matriz Hessiana $H(x,y)$, obtemos

$$f_x(x,y) = -y\operatorname{sen} x; \quad f_y(x,y) = \cos x;$$

$$f_{xx}(x,y) = -y\cos x; \quad f_{yy}(x,y) = 0; \quad f_{xy}(x,y) = -\operatorname{sen} x.$$

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = -\operatorname{sen}^2 x.$$

Determinemos agora os pontos críticos de f, isto é, os pontos (x,y) do domínio de f tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ou onde o gradiente não existe.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -y\operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}.$$

Da segunda equação vemos que $\cos x = 0$, logo na primeira equação temos $\operatorname{sen} x \neq 0$ e daí $y = 0$. Temos ainda,

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pontos críticos: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

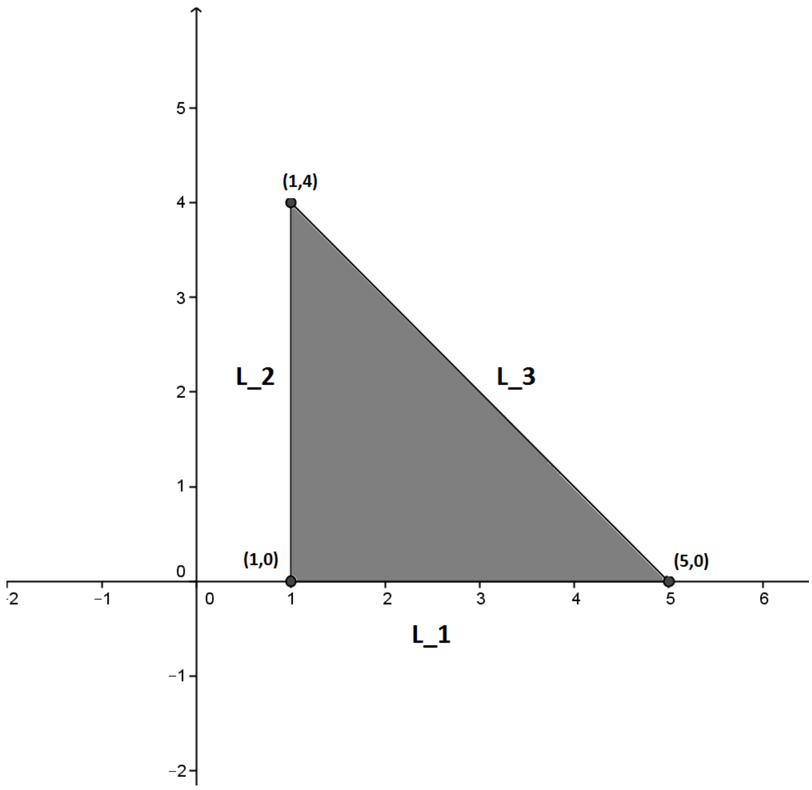
Fazendo o teste da derivada segunda, temos:

$$H\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)=-\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)^2=-1<0\Rightarrow\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),\quad k\in\mathbb{Z}\quad \text{são pontos de sela.}$$

Questão 3: Queremos determinar os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x,y)=3+xy-x-2y$$

na região esboçada abaixo:



Vamos utilizar o algoritmo para determinar os valores extremos de uma função de duas variáveis em um conjunto fechado e limitado.

(i) Determinação dos pontos críticos de f no interior da região dada:
$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(y-1,x-2)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(2,1)$

(ii) Valores de f nos pontos encontrados no passo anterior:

$$f(2,1)=1.$$

(iii) Valores extremos de f na fronteira da região fechada e limitada:

No segmento de reta L_1 que compõe a fronteira da região, isto é, o segmento que vai do ponto $(1,0)$ até o ponto $(5,0)$, todos os pontos são da forma $(x,0)$, com $1\leq x\leq 5$ e, além disso, $f(x,0)=3-x$. Assim o maior e o menor valor que f atinge neste segmento são, respectivamente, $f(1,0) = 2$ e $f(5,0) = -2$.

No segmento de reta L_2 que compõe a fronteira da região, isto é, o segmento que vai do ponto $(1,0)$ até o ponto $(1,4)$, todos os pontos são da forma $(1,y)$, com $0 \leq y \leq 4$ e, além disso, $f(1,y) = -y+2$. Assim o maior e o menor valor que f atinge neste segmento são, respectivamente, $f(1,0) = 2$ e $f(1,4) = -2$.

No segmento de reta L_3 que compõe a fronteira da região, isto é, o segmento que vai do ponto $(1,4)$ até o ponto $(5,0)$, todos os pontos são da forma $(x, -x+5)$, com $1 \leq x \leq 5$ e, além disso, $f(x, -x+5) = -x^2 + 6x - 7$. Assim o maior e o menor valor que f atinge neste segmento são, respectivamente, $f(3,2) = 2$ e $f(1,4) = -2$.

iv) Valores máximo e mínimo absolutos:

Pelos itens anteriores segue que $f(1,0) = 2$ é máximo absoluto de f na região dada e $f(5,0) = -2$ é mínimo absoluto de f na região dada.

Questão 4: Queremos encontrar três números positivos (comprimento das partes do fio) x, y, z tais que o produto $p(x,y,z) = xyz$ seja máximo e além disso, $x + y + z = L$, para um número positivo L fixado. Logo temos um problema de determinar um máximo dada uma restrição. Vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x,y,z) = x + y + z$. Então temos:

$$\begin{cases} \nabla p(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ yx = \lambda \\ x + y + z = L \end{cases}$$

Usando a primeira e a segunda equações obtemos $x = y$. E utilizando a segunda e terceira equações obtemos $y = z$. Lembrando que x, y e z são positivos, logo não nulos. Substituindo o obtido na quarta equação obtemos $x = y = z = \dfrac{L}{3}$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange obtemos que o ponto $\left(\dfrac{L}{3}, \dfrac{L}{3}, \dfrac{L}{3}\right)$ é um ponto de máximo ou mínimo de p dada a restrição. No entanto, observe que

$$p\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right) = \frac{L^3}{32} < \frac{L^3}{27} = p\left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right).$$

Portanto o ponto encontrado é um ponto de máximo de p, dada a restrição. E assim o comprimento de cada parte deve ser $\dfrac{L}{3}$.