Prova final - Álgebra Linear - 14/02/2023

Questão 1:

Podemos reescrever W, como

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a). $W \neq \emptyset$, pois para $b = d = 0$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W.$$

. Por definição $W \subset M_2(\mathbb{R})$

.. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a+c & c \end{pmatrix} \in W$ e

$\alpha \in \mathbb{R}$.

- $A + B = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ (a+c)+(b+d) & c+d \end{pmatrix} \in W$ e

$$-\ \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b \\ \alpha b + \alpha d & \alpha \cdot d \end{pmatrix} \in W.$$

Portanto, W é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$

—— // ——

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

Como as duas matrizes que geram W não são múltiplas uma da outra, elas formam um conjunto

L.I. Portanto,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é base de } W.$$

//

Questão 2:

b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(0,-1,4) + b(1,2,1) + c(1,0,2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} b + c = 0 & \Rightarrow \boxed{b = -c} \\ -a + 2b = 0 & \Rightarrow -a - 2c = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2c} \\ 4a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$-8c - c + 2c = 0 \Rightarrow -7c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

Portanto, S é um conjunto L.I

//

c). (V) De fato, suponha que S seja um conjunto LI com m elementos. Como $S \subset V$, segue que $\dim V \geq m$. Mas por hipótese, $m > n = \dim V$, um absurdo.

(F) Considere, por exemplo, $V = \mathbb{R}^3$ e daí $n = 3$. Seja $S = \{(1,0,1),(2,0,2)\}$. Note que o número de elementos de S é $m = 2 < n$, mas S é um conjunto L.D, já que um vetor é múltiplo escalar do outro.

—— // ——

Questão 3:

b) $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0,0)\}$

$T(x,y) = (0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} -x+y=0 & \Rightarrow x=y \\ x-y=0 & \Rightarrow x=y \\ 2x-2y=0 & \Rightarrow x=y. \end{cases}$$

Logo, $N(T) = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1,1) \rangle$.

//

Questão 4:

a) $N(T)$

$T(x,y,z) = (0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x - 4y + 3z = 0 \\ 5x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -3x}$$

$-2x + 12x + 3z = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{z = -\frac{10x}{3}}$$

$$5x - 12x + \frac{20}{3}x = 0 \Rightarrow -\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 = z$$

$\therefore N(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow T$ é injetora

Pelo T.N.I

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$

$3 = 0 + \dim Im(T)$

Logo $\dim Im(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e portanto, T é sobrejetora.
Assim T é um isomorfismo.

—————— // ——————

b) $T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Rightarrow$

$T \circ T^{-1}(x,y,z) = T(a,b,c) \Rightarrow$

$(x,y,z) = (3a+b, -2a-4b+3c, 5a+4b-2c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=x \\ -2a-4b+3c=y \\ 5a+4b-2c=z \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = x-3a}$$

$-2a-4x+12a+3c = y \Rightarrow$

$3c = -10a+y+4x \Rightarrow$

$$\boxed{c = \frac{-10a+y+4x}{3}}$$

$$5a+4x-12a+\frac{20a-2y-8x}{3} = z \Rightarrow$$

$15a + 12x - 36a + 20a - 2y - 8x = 3z \Rightarrow$

$-a = 3z - 4x + 2y \Rightarrow$

$$\boxed{a = 4x - 2y - 3z}$$

$$\boxed{b = -11x + 6y + 9z}$$

$$c = \frac{-40x + 20y + 30z + y + 4x}{3}$$

$$\boxed{c = -12x + 7y + 10z}$$

$\therefore T^{-1}(x,y,z) = (4x - 2y - 3z, -11x + 6y + 9z, -12x + 7y + 10z)$

—— // ——

Questão 5:

a) $T(1,0,0) = (1,1,2)$

$T(0,1,0) = (1,-1,1)$

$T(0,0,1) = (0,2,-1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

—— // ——

b) $p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 4 + (1+\lambda) - 2(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 3 + 3\lambda$$
$$= (1+\lambda)\left((1-\lambda)(1+\lambda) + 3\right)$$
$$= (1+\lambda)(1-\lambda^2+3)$$
$$= (1+\lambda)(4-\lambda^2) = (1+\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda)$$

———— // ————

c) $p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda = -1,\ \lambda = 2$ ou $\lambda = -2$

———— // ————

d) $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 & \Rightarrow y = -2x \\ x + 2z = 0 & \Rightarrow z = -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

autovetores: $\{(x, -2x, -\frac{x}{2}), x \neq 0\}$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 & \Rightarrow x = y \\ -2y + 2z = 0 & \Rightarrow y = z \end{cases}$$

Autovetores: $\{(x, x, x), x \neq 0\}$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 & \Rightarrow y = -3x \\ -x + z = 0 & \Rightarrow \boxed{x = z} \end{cases}$$

Autovetores: $\{(x, -3x, x), x \neq 0\}$

//

e) Sim, T é diagonalizável, pois existem 3 autovalores distintos e o operador é sobre um espaço de dimensão 3.

Seja $\alpha = \{(2,-4,-1), (1,1,1), (1,-3,1)\}$.

α é base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$