UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 1: Relações de equivalência e ordem (Revisão)

(1) Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Considere as seguintes relações em X:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_4 = X \times X$$

$$R_5 = \emptyset$$

Quais são reflexivas? E simétricas? E transitivas? E antissimétricas?

(2) $\emptyset \subset A \times A$, logo $\emptyset$ é uma relação em A. É de equivalência?

(3) Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(a) Represente no plano cartesiano os pontos da seguinte relação em X:

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}.$$

(Esse conjunto é conhecido como *diagonal* do conjunto X.)

(b) Mostre que Δ_X é uma relação de equivalência sobre X.

(c) Seja S_0 uma relação de equivalência sobre X com a propriedade de estar contida em qualquer outra relação de equivalência sobre X. Mostre que $S_0 = \Delta$. [Dica: basta mostrar que $\Delta_X \subset S_0$.]

(d) Mostre que $X \times X$ é uma relação de equivalência sobre X.

(4) (a) Seja

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{existe} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad \frac{x}{y} = 3^n\}.$$

Mostre que S satisfaz as propriedades simétrica e transitiva, mas não satisfaz a propriedade reflexiva (atenção: o problema não é o número 3 na base da potência)

(b) Sejam X um conjunto não vazio e S uma relação sobre X que satisfaça as propriedades simétrica e transitiva. O raciocínio a seguir "demonstra" que uma relação que seja simétrica e transitiva é também reflexiva.

Sejam $x, y \in X$, se $(x, y) \in S$, pela propriedade simétrica, concluímos que $(y, x) \in S$. Usando agora a propriedade transitiva com os pares $(x, y) \in S$ e $(y, x) \in S$, vemos que $(x, x) \in S$. Assim, S é reflexiva.

O item (a) desta questão é um exemplo de que esse raciocínio está errado. Encontre o erro.

(5) Dados os conjuntos X e $S \subset X \times X$ a seguir, demonstre que S é uma relação de equivalência sobre X ou explique qual a propriedade que falta para não ser uma relação de equivalência.

(a) $X = \mathbb{Z}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a - b \quad \text{é múltiplo de} \quad 3\}$

(b) $X = \{\text{retas do plano cartesiano}\}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \quad \text{é paralela a} \quad b\}$

(c) $X = \{\text{retas do plano cartesiano}\}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \quad \text{é perpendicular a} \quad b\}$

(d) $X = \{\text{pontos do plano cartesinao, exceto a origem}\}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \quad \text{pertence a reta que passa pela origem e por} \quad b\}$

(e) $X = \{\text{pessoas do mundo que têm alguma profissão}\}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \quad \text{tem a mesma profissão que} \quad b\}$

(f) $X = \{\text{pessoas desta faculdade}\}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \quad \text{é amigo de} \quad b\}$

(g) $X = \mathbb{R}, \quad R = \{(a, b) \in X \times X : a \geq b\}$

(6) Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Faça o que se pede em cada item e desenhe os diagramas de flechas.

(a) Dê exemplos de relações sobre X que sejam simétricas e antissimétricas ao mesmo tempo.

(b) Dê exemplos de relações sobre X que sejam simétricas e não sejam antissimétricas.

(c) Dê exemplos de relações sobre X que não sejam simétricas e sejam antissimétricas.

(d) Dê exemplos de relações sobre X que não sejam simétricas e nem antissimétricas.

(7) Pode acontecer de uma relação de equivalência ser também uma relação de ordem parcial (ou total)? Se sim, construa exemplos e, caso contrário, justifique.

(8) Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 50\}$. Defina sobre X a seguinte relação:

$$R = \{(a, b) \in X \times X : a - b \quad \text{é múltiplo de} \quad 4\}.$$

(a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

(b) Descreve as classes de equivalência e escreva o conjunto quociente X/R.

(9) As relações definidas a seguir são de equivalência. Determine o que se pede em cada caso.

(a) $S = \{(a,b) \in X \times X : \; a - b \quad \text{é múltiplo de} \quad 5\}$, onde $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Descreva as classes de equivalência e obtenha o conjunto quociente X/S.

(b) $S = \{(a,b) \in X \times X : \; a - b \quad \text{é múltiplo de} \quad 6\}$, onde $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 35\}$. Descreva as classes de equivalência e obtenha o conjunto quociente X/S.

(10) Seja $X = \{x \in \mathbb{Z} : \, 0 \leq x \leq 20\}$ e defina sobre X a relação

$$S = \{(x,y) \in X \times X : \text{existe} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad x - y = 4n\}.$$

Determine o conjunto quociente X/S.

(11) Seja S uma relação de equivalência definida sobre um conjunto não vazio X. Sejam $x, y \in X$. Demonstre que as afirmações a seguir são equivalentes:

(i) xSy;

(ii) $x \in \overline{y}$;

(iii) $y \in \overline{x}$;

(iv) $\overline{x} = \overline{y}$.

(12) Verifique se cada um dos conjuntos a seguir é totalmente ordenado segundo a relação de divisibilidade.

(a) $X = \{1, 18, 3, 6\}$

(b) $X = \{4, 16, 5\}$

(c) $X = \{-1, 1, -5, 5, -20, 20\}$

(d) $X = \mathbb{Z}$

(13) Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathcal{P}$ uma família de subconjuntos de X. Defina sobre $\mathcal{P}$ a relação de inclusão dada por $S = \{(F_1, F_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : \, F_1 \subset F_2\}$, onde F_1, F_2 são elementos em $\mathcal{P}$.

(a) Mostre que S é reflexiva.

(b) Mostre que S é antissimétrica.

(c) Mostre que S é transitiva.

(d) Verifique se S é uma relação de ordem total sobre $\mathcal{P}$.

(14) Considere $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e defina relação

$$S = \{((x,y),(z,t)) \in X \times X : x \quad \text{divide} \quad z \quad \text{e} \quad y \leq t\}$$

sobre X, em que o símbolo $\leq$ é a desigualdade "menor que ou igual a" no sentido usual.

(a) Demonstre que S satisfaz a propriedade reflexiva.

(b) Demonstre que S satisfaz a propriedade antissimétrica.

(c) Demonstre que S satisfaz a propriedade transitiva.

(d) Discuta porque S é uma relação de ordem parcial, mas não total sobre X.

(15) ***Ordem Lexicográfica.*** Considere $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e sejam $x = a + bi$, $y = c + di$ dois de seus elementos, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Defina sobre $\mathbb{C}$ a seguinte relação:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : \; a < c \quad \text{ou} \quad (a = c \quad \text{e} \quad b \leq d)\},$$

onde o símbolo $\leq$ é a desigualdade "menor que ou igual a" no sentido usual.

(a) Demonstre que S satisfaz a propriedade reflexiva.

(b) Demonstre que S satisfaz a propriedade antissimétrica.

(c) Demonstre que S satisfaz a propriedade transitiva.

(d) Demonstre que S é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{C}$.