



Prova 3 - 22/12/2022

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

**Questão 1:** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação dada por  $T(x, y, z) = (2x - y, x + 3y - z)$ .

- (a) (1,0 ponto) Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
- (b) (1,0 ponto) Determine  $[T]_{\beta}^{\alpha}$ , onde  $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  e  $\beta = \{(1, 0), (0, 2)\}$  são bases de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente.

**Questão 2:** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação dada por  $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, z)$ .

- (a) (1,0 ponto) Mostre que  $T$  é uma transformação linear.
- (b) (0,5 pontos) Determine  $[T]$ .
- (b) (0,5 pontos) Determine o núcleo de  $T$ .
- (c) (1,5 pontos)  $T$  é um isomorfismo? Se sim, determine  $T^{-1}$  e  $[T^{-1}]$ .

**Questão 3:** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear dado por  $T(x, y, z) = (x + 2y + z, 3y + z, -z)$ .

- (a) (0,5 pontos) Determine  $[T]$ .
- (b) (0,5 pontos) Determine o polinômio característico de  $T$ .
- (c) (0,5 pontos) Determine, caso existam, os autovalores de  $T$ .
- (d) (0,5 pontos) Determine, caso existam, os autovetores de  $T$ .
- (e) (0,5 pontos)  $T$  é diagonalizável? Se sim, exiba uma base  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovetores e  $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ .

**Questão 4:** (2,0 pontos) Assinale (V) para as afirmações verdadeiras e (F) para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

- (a) ( ) Existe uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  sobrejetora.
- (b) ( ) O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$  é diagonalizável.
- (c) ( )  $M_3(\mathbb{R}) \simeq P_9(\mathbb{R})$ .
- (d) ( ) A transformação linear **traço**, definida por  $tr : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $tr(A)$  é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz  $A$ , é uma transformação linear injetora.

**Questão extra:**

- (a) (0,5 pontos) O que é uma transformação linear? E operador linear?
- (b) (0,5 pontos) Defina transformação linear injetora e transformação linear sobrejetora.
- (c) (0,5 pontos) O que é um isomorfismos de espaços vetoriais?
- (d) (0,5 pontos) Enuncie o Teorema do Núcleo e da Imagem.
- (e) (0,5 pontos) O que significa dizer que um operador linear é diagonalizável?