UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: ***Álgebra linear*** **- Prof.** ***Victor Martins***

Prova Substitutiva - 16/07/2022

Nome:____Matrícula:____________

Questão 1: *(2,0 pontos)* Dê a definição dos seguintes itens abaixo:

(a) Subespaço vetorial.

(b) Conjunto linearmente independente e linearmente dependente.

(c) Base de um espaço vetorial.

(d) Dimensão de um espaço vetorial.

Questão 2: *(3,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre, se a afirmação for verdadeira, dê um contraexemplo, se for falsa.

(a) ( ) Se A e B são duas matrizes quadradas de mesma ordem, então $AB = BA$.

(b) ( ) Uma matriz inversível A é **ortogonal** se $A^{-1} = A^t$. Então, se A é uma matriz ortogonal, $detA = \pm 1$.

(c) ( ) O sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 10 \end{cases}$ é um sistema possível indeterminado.

(d) ( ) O conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas abaixo não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{e} \qquad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha x_1).$$

(e) ( ) O conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial real de $M_2(\mathbb{R})$.

(f) ( ) O conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial real de $M_2(\mathbb{R})$.

Questão 3: *(5,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre, se a afirmação for verdadeira, dê um contraexemplo, se for falsa.

(a) ( ) Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, w) : \ x + y = w - z \quad \text{e} \quad y + w = 0\} \qquad \text{e}$$
$$W_2 = \{(x, y, z, w) : \ x = y = 0 \quad \text{e} \quad 2w + z = 0\}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$. Então $dimW_1 = 2$, $dimW_2 = 1$ e $dim(W_1 + W_2) = 3$.

(b) ( ) $S = \{x^3 - 5x^2 + 1, 2x^4 + 5x - 6, x^2 - 5x + 2\}$ é um subconjunto linearmente dependente do espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ dos polinômios reais em uma incógnita.

(c) ( ) Se $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$, então $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(d) ( ) $(1, -1, 2) \in \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

(e) ( ) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = d \quad \text{e} \quad b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = c \quad \text{e} \quad b = d \right\}$ subespaços de $M_2(\mathbb{C})$. Então $W_1 \oplus W_2 = M_2(\mathbb{C})$.

BOA PROVA!