UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°. *Victor Martins***

Lista 10: Ideais e anéis quocientes

(1) Mostre que a intersecção de ideais de um anel A é também um ideal de A.

(2) Seja $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de ideais de um anel A. Mostre que, se $J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$ então $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ é um ideal de A.

(3) Seja A um anel e $a \in A$. Mostre que $I = \{x \in A : x \cdot a = 0\}$ é um ideal à esquerda de A.

(4) Sejam I e J ideais de um anel A. Mostre que $I + J = \{x + y : \ x \in I, \ y \in J\}$ é um ideal de A.

(5) Seja I um ideal à esqeurda e J um ideal à direita do anel A. Mostre que

$$I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i : \ n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J\}$$

é um ideal de A.

(6) Seja $(I, +, \cdot)$ um ideal de um anel $(A, +, \cdot)$ com elemento unidade 1. Mostre que:

(a) Se $1 \in I$, então $I = A$.

(b) Se $a \in A$ é inversível e $a \in I$, então $I = A$.

(7) Sejam $(I, +, \cdot)$ e $(J, +, \cdot)$ ideais de um anel $(A, +, \cdot)$ tais que $I \cap J = \{0\}$. Mostre que $a \cdot b = 0$, quaisquer que sejam $a \in I$ e $b \in J$.

(8) Seja I um ideal do anel A e $a \in A$ um elemento fixado. Mostre que o conjunto

$$\langle I, a\rangle = \{i + ra : \ i \in I \quad \text{e} \quad r \in A\}$$

é um ideal de A.

(9) Sejam A um anel comutativo e $N = \{x \in A : x^n = 0, \quad \text{para algum} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Mostre que N é um ideal de A (N é chamado de **radical** de A). Além disso, mostre que se $\bar{x} \in \dfrac{A}{N}$ e $\bar{x}^n = \bar{0}$ para algum inteiro $n \geq 1$ então $\bar{x} = \bar{0}$. (Sugestão: Prove que se $x^n \in \mathbb{N}$ para algum inteiro $n \geq 1$ então $x \in \mathbb{N}$.)

(10) Seja n um inteiro positivo que não é primo. Mostre que o anel $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot\right)$ não é um domínio de integridade.

(11) Seja A um anel comutativo com unidade $1 \in A$, e seja P um ideal de A. Dizemos que P é um **ideal primo** de A se $P \neq A$ e para todos $x, y \in A$, se $x \cdot y \in P$ então $x \in P$ ou $y \in P$. Mostre que:

(a) P é um ideal primo de A se e somente se $\dfrac{A}{P}$ é um domínio de integridade.

(b) os únicos ideias primos de $\mathbb{Z}$ são $\{0\}$ e os ideais principais $p \cdot \mathbb{Z}$, onde p é um número primo.

(c) se P é um ideal maximal de A então P é um ideal primo de A.

(12) Seja $A = \mathcal{C}[0,1]$ o anel das funções reais contínuas (com as operações usuais de soma e produto de funções) definidas no intervalo $[0,1]$. Mostre que, se M é um ideal maximal de A então existe $a \in [0,1]$ tal que

$$M = \{f \in A : \; f(a) = 0\}.$$