Prova final - Álgebra I - 25/07/2023

Questão 1:

E, C, B, C, A, C, D

—— // ——

Questão 2:

- f_a é homomorfismo. De fato, dados $x, y \in \mathbb{K}$, temos:

$$f_a(x+y) = a(x+y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1}$$
$$= f_a(x) + f_a(y)$$

$$f_a(xy) = a(xy)a^{-1} = a(xa^{-1}ay)a^{-1}$$
$$= axa^{-1} \cdot aya^{-1} = f_a(x) \cdot f_a(y).$$

Além disso,

$$Ker(f_a) = \{x \in \mathbb{K} : f_a(x) = 0\}$$

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow axa^{-1} = 0 \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a x \cdot a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot 0 \cdot a$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow Ker(f_a) = \{0\}$$

Logo, f_a é injetora.

Dado $b \in \mathbb{K}$, tome $x = a^{-1}ba$, daí

$$f_a(x) = axa^{-1} = a(a^{-1}ba)a^{-1} = b$$

Logo, f_a é sobrejetora.

Portanto, f_a é um isomorfismo.

Questão 3:

a) $f: A \to B$ é homomorfismo.

Mostremos que $f^{-1}(P) = \{x \in A : f(x) \in P\}$ é ideal primo de A.

- $f^{-1}(P)$ é ideal de A. De fato, $f^{-1}(P) \subset A$, por definição. Dados $a \in A$, $x, y \in f^{-1}(P)$ (logo, $f(x), f(y) \in P$), temos:

$f(x-y) = f(x) - f(y) \in P$, pois P é ideal de B e $f(x), f(y) \in P$. Logo, $x - y \in f^{-1}(P)$.

$f(ax) = f(a) \cdot f(x) \in P$, pois $f(x) \in P$, $f(a) \in B$ e P é ideal de B. Logo, $ax \in f^{-1}(P)$.

Analogamente, mostra-se que $xa \in f^{-1}(P)$.

- Resta mostrar que o ideal $f^{-1}(P)$ é primo.

Sejam $x, y \in A$ tais que $x \cdot y \in f^{-1}(P)$.

Devemos mostrar que $x \in f^{-1}(P)$ ou $y \in f^{-1}(P)$.

Como $xy \in f^{-1}(P)$, $f(xy) \in P$, logo

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \in P \xRightarrow{P \text{ é primo}} f(x) \in P \text{ ou } f(y) \in P$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(P) \text{ ou } y \in f^{-1}(P)$$

como queríamos mostrar.

—————— // ——————

b) Seja n primo e considere o ideal

$I = n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $xy \in I = n\mathbb{Z}$.

Logo, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$xy = n \cdot q \Rightarrow n \mid xy$

$\underset{n \text{ é primo}}{\Rightarrow} n \mid x$ ou $n \mid y$ $\Rightarrow x = nq_2$ ou $y = nq_2$ $\Rightarrow$

$x \in I = n\mathbb{Z}$ ou $y \in I = n\mathbb{Z}$.

Portanto, $n\mathbb{Z}$ é ideal primo de $\mathbb{Z}$.

—————— // ——————

Questão 4:

a) Seja n um número primo e considere o ideal $I = n\mathbb{Z}$. Mostremos que I é maximal.

Suponha $J = m\mathbb{Z}$ ideal de $\mathbb{Z}$ tal que

$$I \subset J \subset \mathbb{Z}.$$

Como $I \subset J$ e $n \in I$, então $n \in J = m\mathbb{Z}$. Logo, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n = m \cdot q \Rightarrow m \mid n$$

Como n é primo, temos as seguintes possibilidades:

- $m = n$ ou $m = -n \Rightarrow J = I$

ou

- $m = 1$ ou $m = -1 \Rightarrow J = \mathbb{Z}$

Portanto, I é maximal

———————— // ————————

b) Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, com $gr(p(x)) = n$, $n \in \{2,3\}$.

Se existe $\alpha \in \mathbb{K}$ raiz de $p(x)$, então $(x-\alpha) \mid p(x)$, logo

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot f(x) \quad e \quad gr(f(x)) = n-1.$$

Como $n-1 \geq 1$, segue que $p(x)$ é redutível.

Reciprocamente, se $p(x)$ é redutível,

$$p(x) = f(x) \cdot g(x),$$

com $gr(f(x)) = k$, $gr(g(x)) = q$, $k \geq 1$, $q \geq 1$ e $k+q = n$.

Como $n \in \{2,3\}$, $k = 1$ ou $q = 1$.

Suponha, sem perda de generalidade, $k=1$. Daí $f(x) = ax+b$, com $a \neq 0$. Logo, $\alpha = -\frac{b}{a} \in K$ é raiz de $f(x)$ e consequentemente é raiz de $p(x)$.

—— // ——

Questão 5:

a) (F)

$$x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm i \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}i].$$

Portanto, x^2-2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{3}i]$

—— // ——

b) V

$p(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

Em $\mathbb{Z}_5[x]$, temos $\bar{p}(x) = 3x^3 - x - 1$

$\bar{p}(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{Z}_5$. Portanto, $\bar{p}(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$ e por uma proposição, segue que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. —— // ——

c) V

Os divisores de zero de $\mathbb{Z}_{15}$ são: $\overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}$, pois

$\overline{3}.\overline{5} = \overline{0}$ $\overline{9}.\overline{5} = \overline{0}$ $\overline{12}.\overline{5} = \overline{0}$

$\overline{6}.\overline{5} = \overline{0}$ $\overline{10}.\overline{3} = \overline{0}$

—— // ——

d) F

Considere o polinômio

$p(x) = (x+\overline{1})^2 = x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

$p(x)$ é redutível.

Logo o ideal $J = \mathbb{Z}_5[x].p(x)$ gerado por $p(x)$ não é maximal.

Portanto, $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{J}$ não é corpo.

—— // ——

e) V

$x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ pelo Critério de Eisenstein usando o primo 2.

E de fato, $x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{10}$ é redutível sobre $\mathbb{Z}_{13}$, pois 1 é raiz do polinômio

—— // ——