UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

# Tutoria em Álgebra Linear

## Módulo 10: Transformações lineares - Parte I

**Ementa:** Definição e exemplos de transformações lineares; núcleo e imagem de uma transformação linear; teorema do núcleo e da imagem; isomorfismo.
***Objetivos:*** Aprender a provar que uma dada aplicação é uma transformação linear e calcular seu núcleo e imagem. Entender como se usa o teorema do núcleo e da imagem em demonstrações.

Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais. Uma **transformação linear** de $U$ em $V$ é uma aplicação $T : U \to V$ satisfazendo:

(i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para quaisquer $u_1, u_2 \in U$;

(ii) $T(au) = aT(u)$, para quaisquer $u \in U$ e $a \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 1** *A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = 10x$, é uma transformação linear?*
***Solução:*** *Vamos verificar se satisfaz (i) e (ii). De fato, se $x_1, x_2$ e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:*

*(i)* $T(x_1 + x_2) = 10(x_1 + x_2) = 10x_1 + 10x_2 = T(x_1) + T(x_2)$

*(ii)* $T(ax_1) = 10ax_1 = a10x_1 = aT(x_1)$

$\therefore$ *$T$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.*

**Exemplo 2** *Verifique se a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x, y) = x + y$ é uma transformação linear.*
***Solução:*** *Para tal, deve satisfazer (i) e (ii).*
*Dado, $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:*

*(i)* $T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = x_1+x_2+y_1+y_2 = (x_1+y_1)+(x_2+y_2) = T(u_1)+T(u_2)$

*(ii)* $T(au_1) = T(a(x_1, y_1)) = T(ax_1, ay_1) = ax_1 + ay_1 = a(x_1 + y_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *$T$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.*

**Exemplo 3** *Seja a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$*, verifique se é uma transformação linear.*
***Solução:****Vamos verificar se satisfaz (i) e (ii). De fato, se* $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$*,* $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a \in \mathbb{R}$*, então:*

*(i)* $T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2-(y_1+y_2), y_1+y_2-(z_1+z_2)) = ((x_1-y_1)+(x_2-y_2), (y_1-z_1)+(y_2-z_2)) = (x_1-y_1, y_1-z_1)+(x_2-y_2, y_2-z_2) = T(u_1)+T(u_2)$

*(ii)* $T(au_1) = T(a(x_1, y_1, z_1)) = T(ax_1, ay_1, az_1) = (ax_1 - ay_1, ay_1 - az_1) = (a(x_1 - y_1), a(y_1 - z_1)) = a(x_1 - y_1, y_1 - z_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$*.*

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais $U$ e $V$, o **núcleo** de $T$, denotado aqui por $N(T)$, é o conjunto de vetores de $U$ que são levados, por $T$, no vetor nulo de $V$, isto é,

$$N(T) = \{u \in U : \ T(u) = 0\}.$$

O conjunto $N(T)$ assim defnido é um subespaço vetorial de $U$. Lembramos que uma aplicação $T$ é injetiva se sempre que tivermos $T(u_1) = T(u_2)$ então $u_1 = u_2$. No caso das transformações lineares, ainda temos que, dada uma transformação linear $T$, vale o seguinte resultado:

$$T \quad \text{é injetiva} \quad \Leftrightarrow N(T) = \{0\}.$$

A **imagem** de uma transformação linear $T : U \to V$ entre os espaços vetoriais $U$ e $V$ é o conjunto

$$Im(T) = T(U) = \{T(u) \in V : \ u \in U\}.$$

O conjunto $Im(T)$ é um subespaço vetorial de $V$. E lembramos que $T$ é sobrejetiva se $Im(T) = V$.

**Exemplo 4** *Determine o núcleo e a imagem da transformação linear,* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$*.*
***Solução:***
*No núcleo da transformação estão todos os elementos do* $\mathbb{R}^2$ *que são transformados no elemento neutro do* $\mathbb{R}^3$ *pela transformação* $T$*, ou seja:*

$$T(x, y) = (x + y, x, 2y) = (0, 0, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

*Assim,* $N(T) = \{(0, 0)\}$ *e* $T$ *é injetiva.*
*Um elemento do contradomínio* $\mathbb{R}^3$ *pertence a imagem de* $T$ *se for da forma:*

$$(x + y, x, 2y) = (x, x, 0) + (y, 0, 2y) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, 2)$$

*Logo,* $Im(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 2)]$.

**Exemplo 5** *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$. Determine o núcleo, a imagem e verifique se a transformação linear é injetiva ou sobrejetiva.*
***Solução:***
*No núcleo da transformação estão todos os elementos do $\mathbb{R}^3$ que são transformados no elemento neutro do $\mathbb{R}^2$ pela transformação $T$, ou seja:*

$$T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases}$$

*Da segunda equaçãodo do sistema, obtemos a variável $x$:*

$$-x = -2z \Leftrightarrow x = 2z$$

*Substituindo o valor de $x$ na primeira equação, teremos que:*

$$2z - y - z = 0 \Leftrightarrow z - y = 0 \Leftrightarrow -y = -z \Leftrightarrow y = z$$

*Assim, o núcleo da transformação linear é $N(T) = \{(2z, z, z); z \in \mathbb{R}\}$, portanto não é injetiva.*
*Um elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^2$ pertence a imagem de $T$ se for da forma:*

$$(x - y - z, 2z - x) = x(1, -1) + y(-1, 0) + z(-1, 2)$$

*Logo, temos que $Im(T) = [(1, -1), (-1, 0)(-1, 2)]$. Vamos escalonar esses geradores da imagem como linhas de uma matriz, para obtermos uma base para a mesma:*
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\therefore$ $\{(1, -1), (0, -1)\}$ *é uma base para $Im(T)$ e a $dim(Im(T)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Como $Im(T)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$ e tem a mesma dimensão que $\mathbb{R}^2$, concluímos que $Im(T) = \mathbb{R}^2$. Logo a transformação linear é sobrejetiva.*

**Teorema 0.1 (Teorema do núcleo e da imagem)** *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, onde $U$ tem dimensão finita. Então*

$$dim\, U = dim N(T) + dim Im(T).$$

Do teorema acima, segue que, se $T : U \to V$ é uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita e $dim\, U = dim\, V$ então para mostrar que $T$ é bijetiva, basta mostrar apenas que $T$ é injetiva ou sobrejetiva, isto é, neste caso

$$T \quad \text{é bijetiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \quad \text{é injetiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \quad \text{é sobrejetiva.}$$

Uma transformação linear bijetiva é chamada **isomorfismo**. Dois espaços vetoriais que possuem um isomorfismo entre eles são ditos **isomorfos**.

**Exemplo 6** *Considere a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y) = (2x, x+y)$. *Verifique se* $T$ *é bijetiva.*

***Solução:***

*Primeiro vamos verificar se* $T$ *é injetiva. Desta forma, um elemento* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *está no núcleo se:*

$$T(x,y) = (2x, x+y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

*Assim,* $N(T) = \{(0,0)\}$ *e* $T$ *é injetiva.*

*Para verificar se* $T$ *é sobrejetiva, poderemos utilizar o teorema do núcleo e da imagem. Como* $dim(N(T)) = 0$ *e* $dim(\mathbb{R}^2) = 2$*, teremos que:*

$$2 = 0 + dimIm(T) \Leftrightarrow dimIm(T) = 2$$

*Como a* $dimIm(T) = dim(\mathbb{R}^2)$*, temos que* $T$ *é sobrejetiva.*

$\therefore$ $T$ *é injetiva e sobrejetiva, logo* $T$ *é bijetiva.*

**Exemplo 7** *Mostre que a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$ *é um isomorfismo.*

***Solução:***

*No núcleo da transformação estão todos os elementos do* $\mathbb{R}^3$ *que são transformados no elemento neutro do* $\mathbb{R}^3$ *pela transformação* $T$*, ou seja:*

$$T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

*Utilizando o método de Guass, para a resolução do sistema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_{1\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \Leftrightarrow L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + 2 \cdot L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

*Assim, temos que:*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

*Logo,* $N(T) = \{(0,0,0)\}$ *e* $T$ *é injetiva.*

*Para verificar se* $T$ *é sobrejetiva, poderemos utilizar o teorema do núcleo e da imagem. Como* $dim(N(T)) = 0$ *e* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$*, teremos que:*

$$3 = 0 + dimIm(T) \Leftrightarrow dimIm(T) = 3$$

*Como $Im(T) = \mathbb{R}^3$, temos que $T$ é sobrejetiva.*
$\therefore$ *$T$ é injetiva e sobrejetiva, logo $T$ é isomorfismo.*

# 1 Exercícios

(1) Entre as funções dadas abaixo, verifique quais são transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, w, z) = (x - y + w + z, x + 2w - z, x + y + 3w - 3z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$;

(2) Dada uma transformação linear $T$ tal que $T(u) = 5u$ e $T(v) = u - v$, calcule em função de $u$ e $v$:

(a) $T(u + v)$;

(b) $T(2v)$;

(c) $T(-2u)$;

(d) $T(u - 8v)$;

(3) Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (y + kx, y + k, x)$. Verifique em que casos $T$ é linear: $k = y, k = 0, k = 1, k = x$.

(4) Determine $n$ e $m$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

(a) $T(1, 1, 1) = (1, 2), T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$;

(b) $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0), T(0, 1, 0) = (1, 0, -1), T(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$

(5) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

(a) Determine $T(x, y)$;

(b) Determine $N(T)$ e $Im(T)$;

(c) $T$ é injetiva? E sobrejetiva?

(6) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

(7) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada por $(1, 2, 3)$ e $(0, 1, 1)$.

(8) Seja $T : U \to \mathbb{R}^5$ uma transformação linear.

(a) Se $T$ é sobrejetiva e $dimN(T) = 2$, qual é a $dim(U)$?;

(b) Se $T$ é injetiva e sobrejetiva, qual é a $dim(U)$?

(9) Verifique se a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$ é isomorfismo.

(10) Considere os operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos por $T(x, y, z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$ e $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$. Verifique quais dos operadores lineares são isomorfismos.

# Referências


[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.