UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra Linear II***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 1: Espaços Vetoriais

(1) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Mostre que, para quaisquer $v \in V$ e $c \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:

(a) $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$;

(b) $c \cdot 0_V = 0_V$;

(c) $c \cdot v = 0 \Rightarrow c = 0 \quad \text{ou} \quad v = 0$.

(d) $-1 \cdot v = -v$.

(2) Verifique se os conjuntos são subespaços vetoriais:

(a) $W_1 = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

(b) $W_2 = \{(x, y, z) : x - y = 0\} \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{C}$.

(c) $W_3 = \{(x, y, z) : z = \cos x + \text{sen} y\} \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

(d) $W_4 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{C}$.

(e) $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}$

(3) Verifique se $W \subset \mathbb{C}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) $W = \{(x, \bar{x}) : x \in \mathbb{C}\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : \bar{z} = x - \bar{y}\}$.

(c) $W = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : \bar{z}_4 + \bar{z}_2 = z_1 + z_3\}$.

(4) Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que $W \subset \mathbb{K}^n$ definido por $W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

(5) Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre que o subconjunto W de $\mathbb{K}^n$ definido por $W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

(6) Sejam $V = M_n(\mathbb{C})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Consideremos os subconjuntos de V, $V_1 = \{A \in V : A^t = A\}$ e $V_2 = \{A \in V : A^t = -A\}$. Mostre que:

(a) V_1 e V_2 são subespaços vetoriais.

(b) $V = V_1 \oplus V_2$.

(7) Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideremos os subconjuntos de V, $V_1 = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$ e $V_2 = \{f \in V : f(-x) = f(x)\}$. Mostre que:

(a) V_1 e V_2 são subespaços vetoriais.

(b) $V = V_1 \oplus V_2$.

(8) Verifique se:

(a) A matriz A é combinação linear das matrizes B e C, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) O polinômio p é combinação linear dos polinômios q e r, sendo

$$p = 3 + 2x + x^2 + x^3, \quad q = 1 + x + x^3 \quad \text{e} \quad r = 1 + x^2 - x^3.$$

(c) O conjunto $\{(1, i, -1), (0, 1, i+1), (i, -2, -2i-1)\} \subset \mathbb{C}^3$ é l.i.

(9) Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 1+x, 1-x^2, 1-x-x^2-x^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$, o espaço veorial dos polinômios de grau até 3 e coeficientes reais.

(10) Encontre uma base para cada um dos subespaços dos exercícios 2 e 3.

(11) Determine todos os subespaços vetoriais dos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais.