UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

**Disciplina:** ***Álgebra I*** **Prof°. *Victor Martins***

# Lista 12: Anéis de polinômios

(1) Determine $q(x)$ e $r(x)$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$ e $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

(a) $f(x) = x^3 + x - 1, \quad g(x) = x^2 + 1;$

(b) $f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = x + 1;$

(c) $f(x) = x^5 - 1, \quad g(x) = x - 1;$

(d) $f(x) = x^4 - 2, \quad g(x) = x^2 - 2;$

(2) Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ onde $b_m = 1$. Prove que existem $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

(3) Seja $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$, $\mathbb{K}$ corpo, e seja $L \supset \mathbb{K}$ uma extensão de $\mathbb{K}$. Prove que, se $\alpha \in L$ é uma raiz de $f(x)$ então existe $q(x) \in L[x]$ tal que $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$.

(4) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Dizemos que $\mathbb{K}$ é um corpo **algebricamente fechado** se para todo $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Prove que $\mathbb{R}$ não é um corpo algebricamente fechado.

(5) Prove que se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, então todo polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado em $\mathbb{K}$ do seguinte modo:

$$f(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

onde $c \in \mathbb{K}$, e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ são raízes de $f(x)$.

(6) Calcule todas as raízes em $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ do polinômio $f(x) = x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}[x]$.

(7) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $L \supset \mathbb{K}$ uma extensão de $\mathbb{K}$. Se $\alpha \in L$ e $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ definimos $f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_n \alpha^n \in L$.

(a) Prove que $\mathbb{K}[\alpha] = \{f(\alpha) : f(x) \in \mathbb{K}[x]\}$ é um domínio de integridade tal que

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha] \subset L.$$

(b) Prove que

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{K}[x] &\to \quad \mathbb{K}[\alpha] \\ f(x) &\mapsto \quad f(\alpha) \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetivo.

(c) Prove que $J = \{f(x) \in \mathbb{K}[x] : f(\alpha) = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{K}[x]$.

(d) Prove que $\dfrac{\mathbb{K}[x]}{J} \simeq \mathbb{K}[\alpha] \subset L$.

(8) Prove que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}) : f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ é igual a $\{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que o ideal $J = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(\sqrt{2}) = 0\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Q}[x]$ e conclua pelo exercício anterior que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é um corpo (generalize para $\sqrt{p}$, $p$ primo).

(9) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $a \in \mathbb{K}$. Prove que

$$\begin{aligned} \phi : \ \mathbb{K}[x] &\to \ \mathbb{K}[x] \\ p(x) &\mapsto \ \phi(p(x)) = p(x+a) \end{aligned}$$

é um automorfismo de $\mathbb{K}[x]$.

(10) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$. Prove que o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x) = x - a$ é $f(a)$.

(11) Calcule $mdc_{\mathbb{C}[x]}\{f(x), g(x)\}$ para os seguintes pares de polinômios em $\mathbb{C}[x]$:

(a) $f(x) = (x-2)^3(x-5)^4(x-i)$;  $g(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^3$

(b) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$;  $g(x) = (x+i)^3(x^3-1)$

(12) Calcule $mdc_{\mathbb{Q}[x]}\{f(x), g(x)\}$ para os seguintes pares de polinômios em $\mathbb{Q}[x]$:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 4$;  $g(x) = x^5 - 6x + 1$

(b) $f(x) = x^2 + 1$;  $g(x) = x^6 + x^3 + x + 1$

(13) Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ e $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Então prove que $d(x)$ é um $mdc$ de $f(x)$ e $g(x)$ em $\mathbb{K}[x]$ se e somente se $a \cdot d(x)$ é um $mdc$ de $f(x)$ e $g(x)$ em $\mathbb{K}[x]$.

(14) Calcule $q(x), r(x)$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ onde ou $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

(a) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 5$;  $g(x) = x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$.

(b) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 5$;  $g(x) = x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(c) $f(x) = x^5 - x^3 + \bar{3}x - \bar{5}$;  $g(x) = x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

(15) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Prove que, se $f(x)$ é um polinômio de grau maior ou igual a 2 e possui uma raiz $a \in \mathbb{K}$ então $f(x)$ é redutível sobre $\mathbb{K}$.

(16) Prove que todo polinômio de grau ímpar sobre $\mathbb{R}$ possui uma raiz em $\mathbb{R}$ (Sugestão: use o teorema do valor intermediário). Conclua que se $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ tem grau ímpar então $f(x)$ é redutível sobre $\mathbb{R}$.

(17) Determine todos os $n$ de modo que $x^2 + \bar{2}$ divide $x^5 - \bar{1}\bar{0}x + \bar{1}\bar{2}$ em $\mathbb{Z}_n$.

(18) Determine todos os polinômios de grau 2 que sejam irredutíveis sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

(19) Mostre que $x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.

(20) Mostre que o polinômio $p(x) = x^3 - 2$ é irredutível sobre o corpo $\mathbb{Q}$.

(21) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio irredutível sobre $\mathbb{K}$ e $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Prove que, se $f(x)|p(x)$ então ou $f(x) = a$ constante não nula ou $p(x) = b \cdot f(x)$ com $b \in \mathbb{K} - \{0\}$.

(22) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio irredutível sobre $\mathbb{K}$. Se $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $p(x)|f(x) \cdot g(x)$, prove que $p(x)|f(x)$ ou $p(x)|g(x)$.

(23) Decomponha o polinômio $x^4 - 5x^2 + 6$ em produto de fatores irredutíveis sobre os seguintes corpos $\mathbb{K}$:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(24) Decomponha sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ os seguintes polinômios como produto de irredutíveis:

(a) $x^2 + x + \bar{1}$

(b) $x^3 + x + \bar{2}$

(25) Prove que o polinômio $x^2 - \bar{3}$ é irredutível sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Mais ainda, se $J = \mathbb{Z}_5[x] \cdot p(x)$, onde $p(x) = x^2 - \bar{3}$ então o corpo $\dfrac{\mathbb{Z}_5}{J}$ possui exatamente 25 elementos.

(26) Prove que o polinômio $p(x) = x^3 + x + \bar{1}$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$. e mostre que o corpo $\dfrac{\mathbb{Z}_5}{J}$ possui exatamente 125 elementos, onde $J = \mathbb{Z}_5[x] \cdot p(x)$.

(27) Sejam $p(x)$ um polinômio irredutível de grau $n$ sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$, $p$ primo, e seja $J = \mathbb{Z}_p[x] \cdot p(x)$. Prove que $\dfrac{\mathbb{Z}_p[x]}{J}$ é um corpo contendo exatamente $p^n$ elementos.

(28) (a) Prove que $p(x) = x^2 + \bar{1}$ é irredutível sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$ e construa um corpo com 49 elementos.

(b) Prove que $p(x) = x^2 + \bar{1}$ é redutível sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{11}$ e construa um corpo com 121 elementos.

(c) Prove que $p(x) = x^2 + \bar{1}$ é redutível sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

(d) Prove que $p(x) = x^3 - \bar{9}$ é irredutível sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{31}$ e construa um corpo com $(31)^3$ elementos.

(29) Prove que os seguintes polinômios $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ são irredutíveis osbre $\mathbb{Q}$.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$

(b) $f(x) = x^7 - 31$

(c) $f(x) = x^6 + 15$

(d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + 25$

(e) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 + 2x + 5$

(f) $f(x) = x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 30x + 22$

(30) Determine quais dos seguintes polinômios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:

(a) $x^3 - x + 1$

(b) $x^3 + 2x + 10$

(c) $x^3 - 2x^2 + x + 15$

(d) $x^4 + 2$

(e) $x^4 - 2$

(f) $x^4 - x + 1$

(31) Determine quais dos seguintes polinômios sobre os seguintes corpos $\mathbb{K}$ são irredutíveis:

(a) $x^7 + 22x^3 + 11x^2 - 44x + 33; \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}$

(b) $x^3 - 7x^2 + 3x + 3; \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}$

(c) $x^4 - \bar{5}; \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_{17}$

(d) $x^3 - \bar{5}; \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_{11}$

(e) $x^4 + \bar{7}; \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_{17}$