Prova final - Álgebra linear - 25/07/2023

Questão 1:

E - C - F - A - G - H - D - B

——— // ———

Questão 2:

Note que podemos reescrever W da seguinte forma:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Mostremos que W é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

- $W \subset M_2(\mathbb{R})$, por definição.
- $W \neq \emptyset$, pois para $b = d = 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.
- Sejam $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ a+c & c \end{pmatrix} \in W$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ a+c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+a \\ (b+a)+(d+c) & d+c \end{pmatrix} \in W$$

$$\cdot\, K \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & kb \\ kb+Kd & Kd \end{pmatrix} \in W.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

—— // ——

b) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b+d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Note que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

gera W, pela construção feita acima e é um conjunto L.I, pois uma matriz não é multipla escalar da outra. Portanto, B é base de W.

— // —

Questão 3:

a) Sejam $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$T((x,y,z)+(a,b,c)) = T(x+a, y+b, z+c)$$
$$= (x+a+y+b+z+c, 2(y+b)+z+c, z+c)$$
$$= (x+y+z, 2y+z, z) + (a+b+c, 2b+c, c)$$
$$= T(x,y,z) + T(a,b,c)$$

$$T(k(x,y,z)) = T(kx, ky, kz)$$
$$= (kx+ky+kz, 2ky+kz, kz)$$
$$= k(x+y+z, 2y+z, z) = kT(x,y,z).$$

Portanto, T é uma transformação linear.

//

b) $[T] = ?$

$T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (1,2,0)$

$T(0,0,1) = (1,1,1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

//

c) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z, 2y+z, z) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow x=0 \\ \Rightarrow y=0 \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow N(T) = \{(0,0,0)\}$

//

d) Pelo item anterior, $\dim N(T) = 0$ e daí que T é injetora.

Pelo T. do Núcleo e da Imagem

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$

$3 = 0 + \dim Im(T)$.

Logo, $\dim Im(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e daí que T é sobrejetora.

Portanto T é bijetora e consequentemente é um isomorfismo.

Logo, existe $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Rightarrow$

$T(T^{-1}(x,y,z)) = T(a,b,c) \Rightarrow$

$(x,y,z) = (a+b+c,\ 2b+c,\ c) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ 2b+c = y \\ \boxed{c = z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = \frac{y-z}{2}}$$

$$a = x - z - \left(\frac{y-z}{2}\right) \Rightarrow$$

$$a = \frac{2x - z - y}{2}$$

Então, $T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{2x-z-y}{2}, \frac{y-z}{2}, z\right)$

$[T^{-1}] = ?$

$T^{-1}(1,0,0) = (1, 0, 0)$

$T^{-1}(0,1,0) = (-1/2, 1/2, 0)$

$T^{-1}(0,0,1) = (-1/2, -1/2, 1)$

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—— //

Questão 4:

a) $T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (2,3,0)$

$T(0,0,1) = (1,1,-1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

—— // ——

b) $p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$p_T(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$

—— // ——

c) Autovalores $(p_T(\lambda) = 0)$

$\lambda = 1, \quad \lambda = 3, \quad \lambda = -1$

—— // ——

d) $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 0$$

Autovetores: $(x, 0, 0)$, $x \neq 0$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$$

Autovetores: $(x, x, 0)$, $x \neq 0$

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z = -4y}$$

$2x + 2y - 4y = 0 \Rightarrow 2x = 2y$

$\Rightarrow x = y$

autovetores: $(y, y, -4y), y \neq 0$

——— // ———

e) Como T é um operador linear de um espaço de dimensão 3 e possui 3 autovalores distintos, T é diagonalizável.

$\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,-4)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

——— // ———