P2 - Álgebra linear - Turma CC

Questão 1:

a) • V_1

Note que, $V_1 \neq \emptyset$, pois a matriz nula $0 \in V_1$.
Já que, $0^t = 0$.
Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e A e $B \in V_1$. Daí $A = A^t$ e $B = B^t$. Então temos:

$$\cdot\ (A+B)^t = A^t + B^t = A + B \Rightarrow A + B \in V_1$$

$$\cdot\ (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in V_1.$$

Portanto, V_1 é subespaço de V.

• V_2

Note que, $V_2 \neq \emptyset$, pois a matriz nula $0 \in V_2$, já que, $0^t = 0 = -0$. Além disso, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e A e $B \in V_2$, isto é, $A^t = -A$ e $B^t = -B$.
Então, temos:

- $(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B)$.

Logo, $A+B \in V_2$.

- $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -\alpha A$

Logo, $\alpha A \in V_2$.

Portanto, V_2 é subespaço de V.

—————— // ——————

b) $V_1 \cap V_2 = \{A \in V : A^t = A \text{ e } A^t = -A\}$
$= \{A \in V : A^t = A = -A\}$
$= \{0\}$.

Logo, $V_1 + V_2$ é soma direta.

Além disso, seja $A \in V$ e considere as matrizes:

$$B = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Note que

- $B^t = \left(\frac{1}{2}(A+A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A+A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t)$

$$= \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = B$$

Logo, $B \in V_1$.

- $C^t = \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t)$

$$= \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -C$$

Logo, $C \in V_2$.

Então, $B + C \in V_1 + V_2$ e ainda

$$B + C = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A.$$

Ou seja, $A = B + C$, com $B \in V_1$ e $C \in V_2$.

Portanto, $V = V_1 \oplus V_2$.

//

Questão 2:

Seja $(0,a,b)$ um vetor genérico de W.
Vejamos se ele pode ser escrito como combinação linear dos vetores u, v, w.
Queremos determinar se existem x, y, z tais que

$$(0,a,b) = xu + yv + zw \Leftrightarrow$$
$$(0,a,b) = x(0,3,1) + y(0,2,-1) + z(0,1,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ x - y + z = b \end{cases} \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} 2x + 3y = a - b \\ x - y + z = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{a - b + 2x}{3}}$$

$$x - \left(\frac{a - b + 2x}{3}\right) + z = b \Rightarrow$$

$$\frac{3x - a + b - 2x}{3} + z = b \Rightarrow$$

$$z = \frac{3b - x + a - b}{3} \Rightarrow z = \frac{a + 2b - x}{3}$$

Então a solução do sistema é

$$\left\{ \left(x, \frac{a-b+2x}{3}, \frac{a+2b-x}{3} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Como o sistema é possível, logo existem valores de x, y e z e portanto o subespaço W é gerado por u, v, w.

—— // ——

Questão 3:

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,-1,1,-1)+b(-1,-2,3,0)+c(0,0,1,-1)+d(0,-3,4,-1)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} a-b=0 & \Rightarrow \boxed{a=b} \\ -a-2b-3d=0 & \Rightarrow -b-2b-3d=0 \Rightarrow \boxed{d=-b} \\ a+3b+c+4d=0 & \\ -a-c-d=0 & \Rightarrow -b-c+b=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é:

$$\{(b, b, 0, -b) : b \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, S é linearmente dependente (LD)

—— // ——

Questão 4:

a) Um subconjunto S de um espaço vetorial V se S for LI e $V = \langle S \rangle$, isto é, S gerar V.

—— // ——

b) Vejamos se $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto LI. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$aA + bB + cC + dD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ b - c = 0 & \Rightarrow c = 0 \\ -c - d = 0 & \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Logo $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto LI e como $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ então é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

//

Questão 5:

Vamos verificar cada uma das afirmações:

a) $W = \langle v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,1) \rangle$.

Vejamos se $(1,2,1) \in W$, ou seja, se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$(1,2,1) = a(1,1,1) + b(1,0,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Portanto, $(1,2,1) \in W$, já que, $(1,2,1) = 1 \cdot v_1 - 1 v_2$. (V)

b) $W_0 = \{(x,y,z) : x - z = 0\}$ $\boxed{x = z}$

$= \{(x,y,x), x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,1) + y(0,1,0) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$

Para que esse espaço coincida com o espaço W dado no enunciado, é suficiente verificar se $v_1 = (1,1,1) \in W_0$, já que, $v_2 \in W_0$.

Observe que:

$$(1,1,1) = 1(1,0,1) + 1(0,1,0).$$

Portanto, $v_1 \in W_0$ e de fato $W_0 = W$.

(V)

~~ // ~~

e) Devemos determinar o vetor v tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$v = 3v_1 - 1v_2 = 3(1,1,1) - (1,0,1)$$
$$= (3,3,3) + (-1,0,-1)$$
$$= (2,3,2).$$

(V)

Portanto, as três afirmações estão corretas.

//

Questão extra:

W_1: reta que contém $(0,0)$ e $(1,2)$

$$y = 2x$$

$$W_1 = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

W_2: reta que contém $(0,0)$ e $(-1,2)$

$$y = -2x$$

$$W_2 = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

• W_1 é subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, $W_1 \subset \mathbb{R}^2$, $W_1 \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W_1$.
E dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $a = (x_1, 2x_1)$, $b = (x_2, 2x_2) \in W_1$, temos

$$a + b = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W_1$$

$$\alpha \cdot a = (\alpha x_1, 2\alpha x_1) \in W_1.$$

• W_2 é subespaço de $\mathbb{R}^2$. De fato, $W_2 \subset \mathbb{R}^2$, $W_2 \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W_2$.
E dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $a = (x_1, -2x_1)$, $b = (x_2, -2x_2) \in W_2$, temos:

$a+b=(x_1+x_2, -2(x_1+x_2)) \in W_2.$

$\alpha . a=(\alpha x_1, -2\alpha x_1) \in W_2.$

- $W_1 \cap W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=2x \text{ e } y=-2x\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=2x=-2x\}$
$= \{(0,0)\}$

Logo, W_1+W_2 é soma direta.

- Observe que

$W_1 = \langle (1,2) \rangle$ e $W_2 = \langle (1,-2) \rangle$

Logo, $W_1+W_2 = \langle (1,2), (1,-2) \rangle.$
Como estes dois vetores não são múltiplos escalar um do outro, formam um conjunto LI e portanto uma base de W_1+W_2. Assim, temos $\dim(W_1+W_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$

Portanto, $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2.$

//