UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 9: Transformações lineares e matrizes

(1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Encontre a matriz que representa T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(2) Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Calcule $[T]^\alpha_\beta$, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$.

(3) Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Dadas duas trasnformações lineares $T, T' : V \to W$ e bases α e β de V e W, respectivamente, mostre que se $[T]^\alpha_\beta = [T']^\alpha_\beta$, então $T = T'$.

(5) Seja D o operador derivada sobre o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3, $P_3(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que D é um operador linear.

(b) Encontre as matrizes $[D]^\beta_\alpha$, $[D]^\alpha_\alpha$, $[D]^\beta_\beta$ e $[D]^\alpha_\beta$, onde

$$\alpha = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\right\}$$

são bases de $P_3(\mathbb{R})$.

(6) Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$, encontre $[T]^\alpha_\beta$, onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

(7) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a multiplicação pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que $N(T)$ é uma reta que passa pela origem e encontre as equações paramétricas desta reta.

(b) Mostre que $Im(T)$ é um plano que passa pela origem e encontre a equação cartesiana deste plano.

(8) Dado o operador linear $T(x,y,z) = (x-2y+z, -x+4y-2z, x)$ em $\mathbb{R}^3$, e a base $\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$, encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) Seja $P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear $T(p(x)) = p(2x+1)$. Encontre $[T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{1, x, x^2\}$.

(10) Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de um espaço vetorial V. Encontre a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ da transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = v_3, \qquad T(v_3) = v_4, \qquad T(v_4) = v_1.$$

(11) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

onde α e β são as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

(a) Determine os vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(v) = I_2$.

(b) Determine $T(3,-1)$.

(12) Considere as transformações lineares

$$T : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n(\mathbb{R}), \qquad T(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

e

$$S : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad S(p(x)) = (p(0), p(1), \ldots, p(n)).$$

Determine as matrizes de $S \circ T$ e $T \circ S$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $P_n(\mathbb{R})$.

(13) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear dada por

$$T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx.$$

Determine as matrizes de T com relação as bases:

(a) $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1\}$.

(b) $\alpha = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ e $\beta = \{-2\}$.

(14) Sejam α e β as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} k & k \\ k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Para que valores de k, T é injetiva?

(b) Para que valores de k, T é sobrejetiva?

(c) No caso em que T não é injetiva, determine $N(T)$.

(15) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a tarsnformação linear tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde α e β são as bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine $T^{-1}(1, 0)$.