**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**
**Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**Disciplina:** ***Álgebra linear*** **- Prof.** ***Victor Martins***

Prova 1 - 19/12/2024

Nome:________________________________________________Matrícula:__________

**Questão 1:** *(2,0 pontos)* Verifique se o subconjunto $W$ é um subespaço vetorial real de $V$ em cada item:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $\qquad W = \{(a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$; $\qquad W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ detA = 0\}$.

**Questão 2:** *(1,0 ponto)* Verifique se $V$ é soma direta de $U$ e $W$, onde $V = \mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

**Questão 3:** *(2,5 pontos)* Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e os subespaços

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Determine:

(a) $dim W_1$.

(b) $dim W_2$.

(c $dim(W_1 \cap W_2)$.

(d) $dim(W_1 + W_2)$.

(e) $W_1 + W_2 = V$? $W_1 + W_2$ é soma direta?

**Questão 4:** *(3,0 pontos)* Determine a dimensão dos subespaços vetoriais abaixo (exiba uma base em cada caso):

(a) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x - 2y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + w = 0\}$ subespaço de $V = \mathbb{R}^4$

(b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ 3x - 3y + z = 0 \quad \text{e} \quad y + w = 0\}$ subespaço de $V = \mathbb{R}^4$

(c) $U \cap W$ subespaço de $V = \mathbb{R}^4$

**Questão 5:** *(1,0 ponto)* Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas a seguir é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 - y_2)$$

$$a(x, y) = (a^2 x, a^2 y).$$

**Questão 6:** *(1,5 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

(a) ( ) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) ( ) O conjunto de vetores $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é linearmente independente.

(c) ( ) Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ como espaço vetorial é 2, então qualquer conjunto com 2 vetores do $\mathbb{R}^2$ é uma base desse espaço.

**BOA PROVA!**
**BOM DESCANSO E BOAS FESTAS DE FIM DE ANO!**