UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra Linear II***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 2: Transformações Lineares

(1) Defina transformação linear e mostre que se $T \in \mathfrak{L}(U,V)$ então

(a) $T(0) = 0$;

(b) $T(cu+v) = cT(u) + T(v)$, com $c \in \mathbb{K}$ e $u, v \in U$.

(2) Mostre que T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

(3) Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U,V)$. Prove que:

(a) $U_0 \leq U \Rightarrow T(U_0) \leq V$;

(b) $V_0 \leq V \Rightarrow T^{-1}(V_0) \leq U$;

(c) $U = [S] \Rightarrow Im\,T = [T(S)]$;

(d) $S \subset V$ l.i. $\Rightarrow T^{-1}(S)$ é l.i.

(4) Verifique se as aplicações são lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$, $T(a,b) = a + bx$;

(b) $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $T(a+bx) = (a, a-b, b+1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & x \\ y & \cos z \end{pmatrix}$;

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, y-x, 0)$;

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x + y - z$;

(f) $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{R})$, $T(A) = AB - BA$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ fixa;

(g) $T : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $T(A) = \mathrm{tr}(A)$.

(5) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz $T(1,1) = (-1,2)$ e $T(-1,1) = (2,-4)$.

(a) Calcule $T(0,1)$ e $T(7,-3)$.

(b) Encontre, se possível, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (\pi, -2\pi)$.

(c) Determine uma base para cada um dos subespaços $N(T)$, $Im(T)$, $N(T) \cap Im(T)$, $N(T) + Im(T)$.

(6) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem da transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX - XM$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear satisfazendo $T(1,1,1,1) = (0,0,1,1)$, $T(1,0,1,1) = (0,1,3,3)$, $T(0,0,1,1) = (0,1,2,2)$, $T(0,0,1,0) = (0,1,1,1)$. Determine uma base de cada um dos subespaços $N(T)$, $Im(T)$, $N(T) \cap Im(T)$, $N(T) + Im(T)$.

(8) Consideremos a transformações linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(x,y,z) = (x - z, x + y - 2z, y - z).$$

Encontre:

(a) $T(1,-1,2)$, $T(0,1,-1)$ e $T(1,0,1)$.

(b) Pelo menos um vetor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (1,2,1)$.

(c) Os subespaços $N(T)$, $Im(T)$ e $N(T) \cap Im(T)$.

(d) Subespaços $W_1 \subset P_2(\mathbb{R})$ e $W_2 \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que W_1 seja isomorfo a $N(T)$ e W_2 seja isomorfo a $Im(T)$.

(9) Sejam $\{u, v\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to P_7(\mathbb{R})$ uma transformação linear. Mostre que uma (e somente uma) das seguintes condições se verifica:

(a) $\{T(u), T(v)\}$ é l.i.;

(b) $\dim Im(T) = 1$;

(c) $Im(T) = \{0\}$.

(10) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3 e $\mathfrak{B} = \{u, v, w\} \subset V$ um subconjunto de V. Mostre que a aplicação linear $T : V \to P_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(u) = 7,\ T(v) = 1 - x \ \text{ e } \ T(w) = x + x^2$$

é bijetora e $\mathfrak{B}$ é uma base de V.

(11) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que o núcleo seja o plano de equação $x + y - z = 0$.

(12) Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Mostre que:

(a) $N(T) \leq U$;

(b) $Im(T) \leq V$.

(13) Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Mostre que T é injetora se, e somente se T leva conujunto l.i. de U em conjunto l.i. de V.

(14) Sejam $W_1, \dots, W_s$ subespaços de V. Dizemos que $W_1, \dots, W_s$ são **independentes** se $v_1 + \dots + v_s = 0$ com $v_k \in W_k$, $k = 1, \dots, s$ implica $v_k = 0$, para todo $k = 1, \dots, s$. Mostre que se $W = W_1 + \dots + W_s$ então são equivalentes:

(a) $W_1, \dots, W_s$ são independentes.

(b) $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$.

(c) Se $\mathcal{B}_k$ é uma base de W_k, $k = 1, \dots, s$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$ é base de W.

(d) $\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_s$.

(15) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com $\dim V = n$, $\mathcal{B}$ base ordenada de V e $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversível. Mostre que existe uma base $\mathcal{B}'$ de V tal que P é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$.

(16) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ e

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

os vetores linhas de A. O **posto-linha** de A é a dimensão do subespaço W de $\mathbb{K}^n$ definido por $W = [v_1, \dots, v_m]$. De modo análogo defini-se o **posto-coluna** de A. Mostre que se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então existem matrizes inversíveis M e P tais que

$$MAP = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo s o posto-coluna de A e I_s a matriz identidade $s \times s$.

(17) Sejam $U = P_2(\mathbb{C})$ e $V = M_2(\mathbb{C})$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. Consideremos as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ de U eV, respectivamente:

$$\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Encontre $L_A^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : U \to V$.

(b) Encontre $L_B^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} : V \to U$, sendo $B = A^t$.