Sobre Módulos de Weyl Truncados

Victor Martins

UFES - Campus de Alegre

21 de fevereiro de 2018

X Workshop de Verão em Matemática do DMA/UFV

Co-autores: *Dr. Ghislain Fourier e Dr. Adriano Moura*.

Representar uma estrutura algébrica abstrata significa transformá-la em uma estrutura mais conhecida e fácil de manipular.

REPRESENTAÇÃO $\Leftrightarrow$ MÓDULO

Representar uma estrutura algébrica abstrata significa transformá-la em uma estrutura mais conhecida e fácil de manipular.

REPRESENTAÇÃO $\Leftrightarrow$ MÓDULO

Notação

◇ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

◇ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

◇ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

◇ $P = \sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

◇ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

◇ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Notação

$\diamond$ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

$\diamond$ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

$\diamond$ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

$\diamond$ $P = \sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

$\diamond$ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

$\diamond$ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Notação

◇ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

◇ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

◇ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

◇ $P = \sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

◇ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

◇ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Notação

◇ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

◇ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

◇ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

◇ $P = \sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

◇ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

◇ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Notação

$\diamond$ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

$\diamond$ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

$\diamond$ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

$\diamond$ $P = \displaystyle\sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \displaystyle\sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

$\diamond$ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

$\diamond$ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Notação

$\diamond$ $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixada;

$\diamond$ $R \subset \mathfrak{h}^*$ conjunto de raizes e R^+ uma escolha de conjunto de raízes positivas;

$\diamond$ α_i raizes simples, ω_i pesos fundamentais, para $i \in I = \{1, \ldots, n\}$;

$\diamond$ $P = \displaystyle\sum_i \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \displaystyle\sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$;

$\diamond$ $\mathfrak{g}_\alpha$ espaço de raizes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$;

$\diamond$ Fixe elementos $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$.

Álgebras de Correntes

$\diamond$ Seja A uma álgebra associativa e comutativa, $\mathfrak{g} \otimes A$ é uma álgebra de Lie com

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab \qquad \text{para todos} \qquad x, y \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in A.$$

$\diamond$ $A = \mathbb{C}[t]$, $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ é a álgebra de correntes sobre $\mathfrak{g}$;

$\diamond$ $A = \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$, $\mathfrak{g}[t]_N := \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$ é a álgebra de correntes truncada;

Álgebras de Correntes

$\diamond$ Seja A uma álgebra associativa e comutativa, $\mathfrak{g} \otimes A$ é uma álgebra de Lie com

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab \qquad \text{para todos} \qquad x, y \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in A.$$

$\diamond$ $A = \mathbb{C}[t]$, $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ é a álgebra de correntes sobre $\mathfrak{g}$;

$\diamond$ $A = \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$, $\mathfrak{g}[t]_N := \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$ é a álgebra de correntes truncada;

Álgebras de Correntes

$\diamond$ Seja A uma álgebra associativa e comutativa, $\mathfrak{g} \otimes A$ é uma álgebra de Lie com

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab \qquad \text{para todos} \qquad x, y \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in A.$$

$\diamond$ $A = \mathbb{C}[t]$, $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ é a álgebra de correntes sobre $\mathfrak{g}$;

$\diamond$ $A = \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$, $\mathfrak{g}[t]_N := \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{C}[t]}{\langle t^N \rangle}$ é a álgebra de correntes truncada;

Módulos de Weyl

O módulo de Weyl local graduado $W(\lambda)$ é o objeto universal na categoria dos módulos de dimensão finita graduados de peso máximo para a álgebra de correntes $\mathfrak{g}[t]$.

Os módulos de Weyl são definidos via geradores e relações como:

Definição

O módulo de Weyl $W(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as seguintes relações definidoras

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

Módulos de Weyl

O módulo de Weyl local graduado $W(\lambda)$ é o objeto universal na categoria dos módulos de dimensão finita graduados de peso máximo para a álgebra de correntes $\mathfrak{g}[t]$.

Os módulos de Weyl são definidos via geradores e relações como:

Definição

O módulo de Weyl $W(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as seguintes relações definidoras

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

$\diamond$ Seja $V(\lambda)$ o $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo irredutível de peso máximo $\lambda \in P^+$. Denote por $V_0(\lambda)$ o $\mathfrak{g}[t]$-módulo obtido pelo pullback de $V(\lambda)$ por $\mathrm{e}v_0(x \otimes f(t)) = f(0)x$.

Proposição

Os módulos irredutíveis da categoria dos $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados de dimensão finita são da forma

$$V(\lambda, m) := \tau_m(V_0(\lambda)),$$

para $\lambda \in P^+$, $m \in \mathbb{Z}$, onde $\tau_m(V)[k] = V[k-m]$.

$\diamond$ Seja $V(\lambda)$ o $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo irredutível de peso máximo $\lambda \in P^+$. Denote por $V_0(\lambda)$ o $\mathfrak{g}[t]$-módulo obtido pelo pullback de $V(\lambda)$ por $\mathrm{ev}_0(x \otimes f(t)) = f(0)x$.

Proposição

Os módulos irredutíveis da categoria dos $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados de dimensão finita são da forma

$$V(\lambda, m) := \tau_m(V_0(\lambda)),$$

para $\lambda \in P^+$, $m \in \mathbb{Z}$, onde $\tau_m(V)[k] = V[k-m]$.

Se $v \in V(\lambda, m)_\lambda$ então

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

Definição

O módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as relações acima como definidoras.

◇ Todo $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo graduado de dimensão finita pode ser visto como um $\mathfrak{g}[t]$-módulo graduado de dimensão finita.

Se $v \in V(\lambda, m)_\lambda$ então

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

Definição

O módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as relações acima como definidoras.

◇ Todo $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo graduado de dimensão finita pode ser visto como um $\mathfrak{g}[t]$-módulo graduado de dimensão finita.

Se $v \in V(\lambda, m)_\lambda$ então

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

Definição

O módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as relações acima como definidoras.

◇ Todo $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo graduado de dimensão finita pode ser visto como um $\mathfrak{g}[t]$-módulo graduado de dimensão finita.

Se $v \in V(\lambda, m)_\lambda$ então

$$\mathfrak{n}^+[t]v = 0; \quad (h \otimes t^k)v = \delta_{0,k}\lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h};$$

$$(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v = 0.$$

Definição

O módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo gerado por um vetor não nulo v satisfazendo as relações acima como definidoras.

◇ Todo $\mathfrak{g}[t]_N$-módulo graduado de dimensão finita pode ser visto como um $\mathfrak{g}[t]$-módulo graduado de dimensão finita.

Produtos de Fusão

◇ Dados $a \in \mathbb{C}$, W um $\mathfrak{g}[t]$-módulo e W_a o pullback de W por $\zeta_a(x \otimes f(t)) = x \otimes f(t+a)$.

◇ $v_1, \ldots, v_k$ geradores dos $\mathfrak{g}[t]$-módulos cíclicos $V^1, \ldots, V^k$, $a_1, \ldots, a_k$ complexos distintos, $V = \bigotimes_{j=1}^k V_{a_j}^j$ e $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$.

◇ Defina uma filtração sobre V por $F^r V = \sum_{0 \leq s \leq r} U(\mathfrak{g}[t])[s]v$.

Definição

O produto de fusão de $V^1, \ldots, V^k$ com respeito a $a_1, \ldots, a_k$, denotado por $V_{a_1}^1 * \cdots * V_{a_k}^k$ é o módulo graduado associado a filtração acima

$$grV = \bigoplus_{r \geq 0} \frac{F^r V}{F^{r-1} V}.$$

Produtos de Fusão

$\diamond$ Dados $a \in \mathbb{C}$, W um $\mathfrak{g}[t]$-módulo e W_a o pullback de W por $\zeta_a(x \otimes f(t)) = x \otimes f(t+a)$.

$\diamond$ $v_1, \ldots, v_k$ geradores dos $\mathfrak{g}[t]$-módulos cíclicos $V^1, \ldots, V^k$, $a_1, \ldots, a_k$ complexos distintos, $V = \bigotimes_{j=1}^k V_{a_j}^j$ e $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$.

$\diamond$ Defina uma filtração sobre V por $F^r V = \sum_{0 \leq s \leq r} U(\mathfrak{g}[t])[s]v$.

Definição

O produto de fusão de $V^1, \ldots, V^k$ com respeito a $a_1, \ldots, a_k$, denotado por $V_{a_1}^1 * \cdots * V_{a_k}^k$ é o módulo graduado associado a filtração acima

$$grV = \bigoplus_{r \geq 0} \frac{F^r V}{F^{r-1} V}.$$

Teorema (Fourier e Littelmann, 2007/ Naoi, 2012)

Tem-se o seguinte isomorfismo de $\mathfrak{g}[t]$-módulos

$$W(\lambda) \cong W(\lambda_1) * \cdots * W(\lambda_k),$$

se $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Este resultado motiva uma busca por alguma decomposição em produto de fusão para o módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$.

Teorema (Fourier e Littelmann, 2007/ Naoi, 2012)

Tem-se o seguinte isomorfismo de $\mathfrak{g}[t]$-módulos

$$W(\lambda) \cong W(\lambda_1) * \cdots * W(\lambda_k),$$

se $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Este resultado motiva uma busca por alguma decomposição em produto de fusão para o módulo de Weyl truncado $W_N(\lambda)$.

Conjectura de Chari-Fourier-Sagaki

$\diamond$ $P^+(\lambda, N)$ é o subconjunto de $(P^+)^N$ consistindo de elementos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ tais que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = \lambda.$$

$\diamond$ Chari, Fourier e Sagaki definiram uma ordem parcial em $P^+(\lambda, N)$ e posteriormente Fourier obteve um algoritmo para calcular um elemento maximal em $P^+(\lambda, N)$.

Conjectura (Chari-Fourier-Sagaki, 2014)

Suponha $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{max}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in P^+(\lambda, N)$. *Se* $N \leq |\lambda| := \sum_{i \in I} \lambda(h_i)$,

$$W_N(\lambda) \cong V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_N)$$

como $\mathfrak{g}[t]$*-módulos graduados.*

Casos já provados:

1. $\mathfrak{g}$ de tipo ADE, $\lambda = m\theta$, $m \geq 0$, $N = |\lambda|$ [Ravinder, 2014];
2. $\lambda = N\mu + \nu$, ν minúsculo, $\mu \in \{\lambda \in P^+ : d_i | \lambda(h_i)\}$, $d_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ [Kus e Littelmann, 2014];
3. $\mathfrak{g}$ de tipo A, $N = 2$, $\lambda = m\omega_i$ [Fourier, 2015].

Conjectura (Chari-Fourier-Sagaki, 2014)

Suponha $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{max}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in P^+(\lambda, N)$. *Se* $N \leq |\lambda| := \sum_{i \in I} \lambda(h_i)$,

$$W_N(\lambda) \cong V(\lambda_1) * \cdots * V(\lambda_N)$$

como $\mathfrak{g}[t]$*-módulos graduados.*

Casos já provados:

1. $\mathfrak{g}$ de tipo ADE, $\lambda = m\theta$, $m \geq 0$, $N = |\lambda|$ [Ravinder, 2014];
2. $\lambda = N\mu + \nu$, ν minúsculo, $\mu \in \{\lambda \in P^+ : d_i | \lambda(h_i)\}$, $d_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ [Kus e Littelmann, 2014];
3. $\mathfrak{g}$ de tipo A, $N = 2$, $\lambda = m\omega_i$ [Fourier, 2015].

Módulos de Chari-Venkatesh (CV-módulos)

Uma família de partições $\xi = (\xi(\alpha))_{\alpha \in R^+}$ é dita λ-compatível se $\xi(\alpha) = (\xi(\alpha)_1 \geq \ldots \geq \xi(\alpha)_s \geq 0)$ e para todo $\alpha \in R^+$

$$\lambda(h_\alpha) = \sum_{j \geq 1} \xi(\alpha)_j.$$

Definição

O CV-módulo $CV(\xi)$ é o quociente de $W(\lambda)$ pelo submódulo gerado por

$$\left\{ (x_\alpha^+ \otimes t)^s (x_\alpha^-)^{s+r} w : \alpha \in R^+,\ s, r \neq 0,\ s + r > rk + \sum_{j > k} \xi(\alpha)_j \right\},$$

para algum $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, onde $w \in W(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$.

Módulos de Chari-Venkatesh (CV-módulos)

Uma família de partições $\xi = (\xi(\alpha))_{\alpha \in R^+}$ é dita λ-compatível se $\xi(\alpha) = (\xi(\alpha)_1 \geq \ldots \geq \xi(\alpha)_s \geq 0)$ e para todo $\alpha \in R^+$

$$\lambda(h_\alpha) = \sum_{j \geq 1} \xi(\alpha)_j.$$

Definição

O CV-módulo $CV(\xi)$ é o quociente de $W(\lambda)$ pelo submódulo gerado por

$$\left\{ (x_\alpha^+ \otimes t)^s (x_\alpha^-)^{s+r} w : \alpha \in R^+,\ s, r \neq 0,\ s + r > rk + \sum_{j > k} \xi(\alpha)_j \right\},$$

para algum $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, onde $w \in W(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$.

Exemplos

Considere as duas famílias de λ-compatíveis partições:

$$\xi = (\lambda(h_\alpha))_{\alpha\in R^+} \quad \text{e} \quad \xi' = ((1^{\lambda(h_\alpha)}))_{\alpha\in R^+}.$$

Proposição

$$CV(\xi) \cong V_0(\lambda) \quad e \quad CV(\xi') \cong W(\lambda).$$

Exemplos

Considere as duas famílias de λ-compatíveis partições:

$$\xi = (\lambda(h_\alpha))_{\alpha \in R^+} \quad \text{e} \quad \xi' = ((1^{\lambda(h_\alpha)}))_{\alpha \in R^+}.$$

Proposição

$$CV(\xi) \cong V_0(\lambda) \quad e \quad CV(\xi') \cong W(\lambda).$$

CV-módulos para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Identifique P com $\mathbb{Z}$ e considere uma λ-compatível partição $\xi = (\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_\ell > 0)$, para $\ell > 1$.

Teorema (Chari e Venkatesh, 2015)

Seja ξ uma partição de λ, com ℓ partes. Existe um isomorfismo

$$CV(\xi) \cong V(\xi_1) * \cdots * V(\xi_\ell)$$

de $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados.

CV-módulos para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Identifique P com $\mathbb{Z}$ e considere uma λ-compatível partição $\xi = (\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_\ell > 0)$, para $\ell > 1$.

Teorema (Chari e Venkatesh, 2015)

Seja ξ uma partição de λ, com ℓ partes. Existe um isomorfismo

$$CV(\xi) \cong V(\xi_1) * \cdots * V(\xi_\ell)$$

de $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados.

$\diamond$ Dado $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Para cada $\alpha \in R^+$, sejam q_α e p_α os únicos inteiros não negativos tais que

$$\lambda(h_\alpha) = Nq_\alpha + p_\alpha \quad \text{e} \quad 0 \leq p_\alpha < N.$$

Se $N = \infty$, sejam $q_\alpha = 0$ e $p_\alpha = \lambda(h_\alpha)$

$\diamond$ Considere a λ-compatível família de partições ξ_N^λ dada por

$$\xi_N^\lambda(\alpha) = ((q_\alpha + 1)^{(p_\alpha)}, q_\alpha^{(N-p_\alpha)}).$$

$\diamond$ Dado $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Para cada $\alpha \in R^+$, sejam q_α e p_α os únicos inteiros não negativos tais que

$$\lambda(h_\alpha) = Nq_\alpha + p_\alpha \quad \text{e} \quad 0 \leq p_\alpha < N.$$

Se $N = \infty$, sejam $q_\alpha = 0$ e $p_\alpha = \lambda(h_\alpha)$

$\diamond$ Considere a λ-compatível família de partições ξ_N^λ dada por

$$\xi_N^\lambda(\alpha) = ((q_\alpha + 1)^{(p_\alpha)}, q_\alpha^{(N-p_\alpha)}).$$

Teorema

Os módulos $CV(\xi_N^\lambda)$ e $W_N(\lambda)$ são $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados isomorfos.

Módulos de Kirillov-Reshetikhin (KR-módulos)

Definição

Se $w \in W(m\omega_i)_{m\omega_i} \setminus \{0\}$. O KR-módulo graduado $KR(m\omega_i)$ é o quociente de $W(m\omega_i)$ pelo submódulo gerado por

$$(x_i^- \otimes t)w.$$

Se $\underline{\mathbf{m}} = (m_1, \ldots, m_N) \in (Z_{>0})^N$, considere

$$KR_i(\underline{\mathbf{m}}) = KR(m_1\omega_i) * \cdots * KR(m_N\omega_i),$$

$$V_i(\underline{\mathbf{m}}) = V(m_1\omega_i) * \cdots * V(m_N\omega_i).$$

Proposição (Chari,2001 /Chari e Moura, 2006)

Se $ht_i(\theta) = 1$, $KR_i(\underline{m}) \cong V_i(\underline{m})$.

Módulos de Kirillov-Reshetikhin (KR-módulos)

Definição

Se $w \in W(m\omega_i)_{m\omega_i} \setminus \{0\}$. O KR-módulo graduado $KR(m\omega_i)$ é o quociente de $W(m\omega_i)$ pelo submódulo gerado por

$$(x_i^- \otimes t)w.$$

Se $\underline{\mathbf{m}} = (m_1, \ldots, m_N) \in (Z_{>0})^N$, considere

$$KR_i(\underline{\mathbf{m}}) = KR(m_1\omega_i) * \cdots * KR(m_N\omega_i),$$

$$V_i(\underline{\mathbf{m}}) = V(m_1\omega_i) * \cdots * V(m_N\omega_i).$$

Proposição (Chari,2001 /Chari e Moura, 2006)

Se $ht_i(\theta) = 1$, $KR_i(\underline{m}) \cong V_i(\underline{m})$.

Módulos de Kirillov-Reshetikhin (KR-módulos)

Definição

Se $w \in W(m\omega_i)_{m\omega_i} \setminus \{0\}$. O KR-módulo graduado $KR(m\omega_i)$ é o quociente de $W(m\omega_i)$ pelo submódulo gerado por

$$(x_i^- \otimes t)w.$$

Se $\underline{\mathbf{m}} = (m_1, \ldots, m_N) \in (Z_{>0})^N$, considere

$$KR_i(\underline{\mathbf{m}}) = KR(m_1\omega_i) * \cdots * KR(m_N\omega_i),$$

$$V_i(\underline{\mathbf{m}}) = V(m_1\omega_i) * \cdots * V(m_N\omega_i).$$

Proposição (Chari,2001 /Chari e Moura, 2006)

Se $ht_i(\theta) = 1$, $KR_i(\underline{\boldsymbol{m}}) \cong V_i(\underline{\boldsymbol{m}})$.

Teorema

Se $ht_i(\theta) = 1$, então a conjectura de Chari-Fourier-Sagaki vale para $\lambda = m\omega_i$ para todo $m \geq 0$.

Módulos de Demazure

Definição

Se $\mathfrak{g}$ é de tipo ADE, o $\mathfrak{g}$-estável módulo de Demazure $D(\ell, \lambda)$ de nível ℓ é o quociente de $W(\lambda)$ pelo submódulo gerado por

$$\{(x_\alpha^- \otimes t^{s_\alpha})v\} \cup \{(x_\alpha^- \otimes t^{s_\alpha - 1})^{m_\alpha + 1} v : m_\alpha < \ell\},$$

onde $v \in W(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $\alpha \in R^+$, e s_α, m_α são os inteiros definidos por $\lambda(h_\alpha) = (s_\alpha - 1)\ell + m_\alpha, \quad 0 < m_\alpha \leq \ell$. Dado $r > 0$, $D(\ell, \lambda, r) := \tau_r D(\ell, \lambda)$ também é módulo de Demazure.

$\diamond$ Se $\mathfrak{g}$ é de tipo ADE então $W(\lambda) \cong D(1, \lambda)$.[Fourier e Littelmann, 2007]

Módulos de Demazure

Definição

Se $\mathfrak{g}$ é de tipo ADE, o $\mathfrak{g}$-estável módulo de Demazure $D(\ell, \lambda)$ de nível ℓ é o quociente de $W(\lambda)$ pelo submódulo gerado por

$$\{(x_\alpha^- \otimes t^{s_\alpha})v\} \cup \{(x_\alpha^- \otimes t^{s_\alpha - 1})^{m_\alpha + 1} v : m_\alpha < \ell\},$$

onde $v \in W(\lambda)_\lambda \setminus \{0\}$, $\alpha \in R^+$, e s_α, m_α são os inteiros definidos por $\lambda(h_\alpha) = (s_\alpha - 1)\ell + m_\alpha, \quad 0 < m_\alpha \leq \ell$. Dado $r > 0$, $D(\ell, \lambda, r) := \tau_r D(\ell, \lambda)$ também é módulo de Demazure.

$\diamond$ Se $\mathfrak{g}$ é de tipo ADE então $W(\lambda) \cong D(1, \lambda)$.[Fourier e Littelmann, 2007]

Bandeiras de Demazure

Definição

Um $\mathfrak{g}[t]$-módulo V admite uma bandeira de Demazure de nível ℓ se existe $k > 0, \lambda_j \in P^+, m_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, k$, e

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{k-1} \subset V_k = V$$

com $V_j/V_{j-1} \cong D(\ell, \lambda_j, m_j)\ \forall\ 1 \leq j \leq k$.

Caso: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Se $\lambda = Nq + p$, $0 \leq p < N$ então:

Proposição

$$W_N(\lambda) \cong \begin{cases} D(q,\lambda), & se\ N|\lambda, \\ D(q+1,\lambda), & se\ p \in \{N-1,\lambda\}. \end{cases}$$

Note que $p = \lambda$ se e somente se $N > \lambda$.

Proposição

O módulo $W_N(\lambda)$ admite uma bandeira de Demazure de nível ℓ se e somente se

$$\ell \geq \begin{cases} q, & se\ \ N|\lambda, \\ q+1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Caso: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Se $\lambda = Nq + p$, $0 \leq p < N$ então:

Proposição

$$W_N(\lambda) \cong \begin{cases} D(q, \lambda), & se\ N|\lambda, \\ D(q+1, \lambda), & se\ p \in \{N-1, \lambda\}. \end{cases}$$

Note que $p = \lambda$ se e somente se $N > \lambda$.

Proposição

O módulo $W_N(\lambda)$ admite uma bandeira de Demazure de nível ℓ se e somente se

$$\ell \geq \begin{cases} q, & se\ \ N|\lambda, \\ q+1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A multiplicidade de um módulo de Demazure D em uma bandeira de Demazure de nível ℓ de V é

$$[V : D] = \#\{1 \leq j \leq l : V_j/V_{j-1} \cong D\}.$$

Considere

$$[V : D](t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [V : \tau_m D]\ t^m \ \in \ \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Teorema (Chari, Schneider, Shereen e Wand, 2014)

Se $0 \leq k \leq \lambda$,

$$[W(\lambda) : D(2, \lambda - 2k)](t) = t^{k\lceil \lambda/2 \rceil} \begin{bmatrix} \lfloor \lambda/2 \rfloor \\ k \end{bmatrix}_t,$$

onde $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_t = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 - t^{m-j}}{1 - t^{k-j}}, \quad 0 \leq k \leq m.$

A multiplicidade de um módulo de Demazure D em uma bandeira de Demazure de nível ℓ de V é

$$[V : D] = \#\{1 \leq j \leq l : V_j/V_{j-1} \cong D\}.$$

Considere

$$[V : D](t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [V : \tau_m D]\ t^m \ \in \ \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Teorema (Chari, Schneider, Shereen e Wand, 2014)

Se $0 \leq k \leq \lambda$,

$$[W(\lambda) : D(2, \lambda - 2k)](t) = t^{k\lceil \lambda/2 \rceil} \begin{bmatrix} \lfloor \lambda/2 \rfloor \\ k \end{bmatrix}_t,$$

onde $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_t = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 - t^{m-j}}{1 - t^{k-j}}, \quad 0 \leq k \leq m.$

A multiplicidade de um módulo de Demazure D em uma bandeira de Demazure de nível ℓ de V é

$$[V : D] = \#\{1 \leq j \leq l : V_j/V_{j-1} \cong D\}.$$

Considere

$$[V : D](t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} [V : \tau_m D]\ t^m \ \in \ \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Teorema (Chari, Schneider, Shereen e Wand, 2014)

Se $0 \leq k \leq \lambda$,

$$[W(\lambda) : D(2, \lambda - 2k)](t) = t^{k\lceil\lambda/2\rceil} \begin{bmatrix} \lfloor\lambda/2\rfloor \\ k \end{bmatrix}_t,$$

onde $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_t = \prod_{j=0}^{k-1} \dfrac{1 - t^{m-j}}{1 - t^{k-j}}, \quad 0 \leq k \leq m.$

Se $\lambda = qN + p, \mu \in P^+$, o que podemos dizer sobre

$$[W_N(\lambda) : D(q+1, \mu)](t) = ?$$

Proposição

Se $\mu = \lambda - 2k$, $k \geq 0$ e $\lambda = N + p$, com $0 < p < N - 1$. Então,

$$[W_N(\lambda) : D(2, \mu)](t) = \begin{cases} t^{k\lceil \lambda/2 \rceil} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{2N-\lambda}{2} \rfloor \\ k \end{bmatrix}_t, & \text{se } \; k \leq \lfloor \frac{2N-\lambda}{2} \rfloor, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\lambda = qN + p, \mu \in P^+$, o que podemos dizer sobre

$$[W_N(\lambda) : D(q+1,\mu)](t) = ?$$

Proposição

Se $\mu = \lambda - 2k$, $k \geq 0$ e $\lambda = N + p$, com $0 < p < N-1$. Então,

$$[W_N(\lambda) : D(2,\mu)](t) = \begin{cases} t^{k\lceil \lambda/2 \rceil} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{2N-\lambda}{2} \rfloor \\ k \end{bmatrix}_t, & \text{se } \; k \leq \lfloor \frac{2N-\lambda}{2} \rfloor, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

V. Chari, G. Fourier, T. Khandai,
A categorical approach to Weyl modules.
Transf. Groups **15** (2010), 517–549.

V. Chari, R. Venkatesh,
Demazure modules, fusion products and Q-systems.
Commun. Math. Phys. **333** (2015), 799–830.

G. Fourier, V. Martins, A. Moura
On Truncated Weyl Modules.
arXiv:1711.09631.

D. Kus, P. Littelmann,
Fusion products and toroidal algebras.
Pacific J. Math. **278** (2015), 427-445.