

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - CCENS

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

*Partições de inteiros
via representação matricial*

Discente: *Igor Vallis Christ*
Orientador: *Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins (DMPA - UFES)*

JULHO/2021

SUMÁRIO

Introdução	2
1 Partições de inteiros	4
1.1 Conceitos básicos	4
1.2 Representações matriciais	7
2 Identidades de Rogers-Ramanujan	14
2.1 Representações matriciais e as identidades de Rogers-Ramanujan	15
2.1.1 Primeira identidade	15
2.1.1.1 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$	18
2.1.2 Segunda identidade	25
2.1.2.1 Partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$	28
3 Bijeções e mais algumas representações matriciais	33
3.1 Partições com partes congruentes a $2 \pmod{4}$	33
3.2 Partições com partes 2-distintas	36
3.3 Identidade de Schur	37
Considerações finais	40
Referências Bibliográficas	41

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - CCENS

RESUMO

PARTIÇÕES DE INTEIROS
VIA REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Este trabalho consiste, principalmente, no estudo das representações matriciais de partições, ferramenta promissora dentro da teoria das partições de inteiros. Todas as representações discutidas aqui consistem de matrizes de duas linhas, porém variam quanto as suas condições definidoras. Apresentaremos exemplos de representações para partições irrestritas e nos aprofundamos nas representações referentes as partições que compõem a primeira e a segunda identidade de Rogers-Ramanujan, bem como os novos resultados possíveis a partir destas. Buscamos evidenciar algumas das principais utilidades das representações matriciais na teoria e passos seguintes que podem ser dados em trabalhos futuros sobre o tema, concluiremos que, com as representações matriciais de partições conseguimos novas conjecturas, novos resultados e a melhora de outros já existentes.

Palavras-chave: Identidades de Rogers-Ramanujan. Partições de inteiros. Representação matricial.

INTRODUÇÃO

A teoria das partições de inteiros é um subtópico da teoria aditiva dos números que surgiu no século XVIII com o matemático suíço Leonard Euler. Seus principais resultados levam em consideração a definição de **partição de n** , que são as formas de se somar n usando apenas inteiros positivos, chamados na teoria de **partes**.

Contar o número de partições de n , denotado por $p(n)$, torna-se trabalhoso conforme n cresce. Por exemplo, as partições de 4 são: (4) , $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$. Observe que para $n = 4$, $p(4) = 5$, uma vez que podemos somar 4 de cinco maneiras diferentes utilizando apenas inteiros positivos. Porém, para $n = 200$, um inteiro significativamente pequeno, $p(200) = 3972999029388$. Este comportamento para $p(n)$ intrigou e chamou a atenção de muitos matemáticos para a teoria, que passaram então a investigar o comportamento de $p(n)$, bem como propor novas conjecturas e resultados em formas de **identidades**, que são afirmações do tipo: o número de partições de n satisfazendo a restrição A é igual ao número de partições de n satisfazendo a restrição B .

Dentre as principais maneiras de se demonstrar identidades na teoria, encontram-se as provas bijetivas, provas nas quais buscamos por fazer uma bijeção entre os dois conjuntos de partições em questão e as provas por meio do uso de funções geradoras, na qual buscamos por mostrar a igualdade entre as funções que geram cada um dos conjuntos em questão. Entretanto, atualmente, uma nova ferramenta tem ganhado destaque na teoria: a representação matricial de partições.

Em 2011, Santos, Mondek e Ribeiro, [5], apresentaram uma nova maneira de estudarmos partições de inteiros, utilizando matrizes de duas linhas, exibindo duas diferentes representações matriciais para partições irrestritas, uma delas fornecendo uma descrição para a partição conjugada. Essa nova maneira de descrever as partições tornou-se objeto de estudo

de alguns matemáticos. Em 2010, Brietzke, Santos e Silva, [2], que já tinham conhecimento dos resultados obtidos em [5], ainda que este trabalho fosse ser publicado posteriormente, obtiveram provas bijetivas de partições utilizando a nova representação por matrizes.

A representação matricial de partições tem se mostrado uma ferramenta útil para a teoria, uma vez que esta vem contribuindo para o surgimento de novas conjecturas, novos resultados, além de serem utilizadas para melhorar resultados já existentes. Por conta disso, o estudo da partições de inteiros via representação matricial tem ganhado destaque na teoria e atraído a atenção de muitos pesquisadores. Em 2016, em sua tese de doutorado, Wagner, [1], apresenta novos resultados relacionados as identidades de Rogers-Ramanujan, utilizando as matrizes de duas linhas.

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução ao estudo das representações matriciais de partições, onde discutimos algumas das principais representações e resultados relacionados a estas. Para isso, dividimos este trabalho em três capítulos. No primeiro, baseados principalmente em [4] e [6], nos dedicamos a apresentar ao leitor os conceitos básicos da teoria das partições de inteiros e algumas formas de se representar partições irrestritas a partir de matrizes de duas linhas.

No segundo capítulo deste trabalho, seguindo os passos de [1], apresentamos as funções geradoras para os conjuntos que compõem a primeira e a segunda identidade de Rogers-Ramanujan e as representações matriciais das partições que as compõem, para assim então conhecermos novos resultados que foram possíveis a partir destas representações matriciais.

No terceiro e último capítulo deste trabalho, apresentamos outras representações matriciais para algumas partições com restrições e discutimos sobre a utilidade das representações matriciais para além de uma simples maneira diferente de se apresentar partições, assim como podemos observar em [2] e [7]. Para isso utilizamos representações matriciais para mostrar algumas identidades de partições. Além disso, utilizando como exemplo a identidade de Schur, apresentamos novos caminhos para futuros trabalhos com o uso de representações matriciais de partições.

Esperamos com este texto, apresentar um pouco sobre a teoria de partições, principalmente devido a breve introdução feita no Capítulo 1, porém, para além disso, buscamos apresentar um material que sirva de introdução a essa nova representação de partições através de matrizes de duas linhas, que por sua vez, corresponde a um tema atual dentro da teoria, sendo ferramenta utilizada em pesquisas recentes, sendo assim, um interessante tópico para aqueles que estão iniciando as pesquisas em teoria de partições.

CAPÍTULO 1

PARTIÇÕES DE INTEIROS

A teoria das partições de inteiros teve seu início no século XVIII com o matemático suíço Leonard Euler. Os conceitos que fundamentam essa teoria são de fácil entendimento e são principalmente as definições de partição, partes de uma partição e o número de partições de um inteiro n , que é denotado por $p(n)$. Com o passar do tempo a teoria das partições de inteiros vem atraindo cada vez mais pesquisadores e com isso novas abordagens vêm surgindo. Desta forma, neste capítulo, além de conhecermos os conceitos primordiais da teoria, apresentaremos também, a representação gráfica de partições por meio dos gráficos de Ferrers, a definição e exemplos de funções geradoras voltadas para a teoria e representações matriciais para partições irrestritas de n . Para mais detalhes da teoria básica das partições e como um primeiro contato com a teoria, sugerimos [4, 6].

1.1 Conceitos básicos

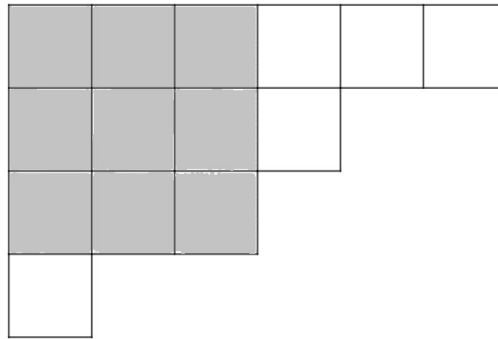
Para cada inteiro positivo n , definimos $p(n)$ como sendo o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados **partes**, na qual a ordem dessas partes não importa. Cada uma dessas somas é chamada de **partição** de n . Neste trabalho não é nosso objetivo aprofundar os estudos sobre a função $p(n)$, entretanto é importante ressaltar que a busca por fórmulas para tal função foi algo que contribuiu consideravelmente para os avanços das pesquisas na teoria. Em [3] é apresentado um pouco da importância da busca por tal fórmula.

No que segue, utilizaremos a seguinte notação:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) :=$ partição de n em que os λ_i são partes da partição e estão dispostas em ordem decrescente, além de que, $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$.

O maior quadrado possível de colocarmos “dentro” do diagrama de Young de uma partição de forma que seu canto superior esquerdo coincida com o canto superior esquerdo do diagrama de Young é chamado **quadrado de Durfee**.

Exemplo 1.3 *A parte sombreada no gráfico abaixo da partição (6, 4, 3, 1) de 14 é o quadrado de Durfee dela.*



Dizemos que a partição (6, 4, 3, 1) possui quadrado de Durfee de lado 3.

Dentre as principais formas de demonstrações de resultados na teoria destacamos as **provas bijetivas** e as **provas através de funções geradoras**. Na primeira, buscamos uma bijeção entre dois conjuntos de partições e isto muitas vezes é feito utilizando as representações gráficas das partições; já na segunda, mostramos uma igualdade entre duas funções geradoras.

Definição 1.1 *Uma **série de potências** é uma soma infinita da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, em que a_i , para $i = 1, 2, 3, \dots$, são números reais e x é uma variável. Dada uma sequência $(a_r)_{r \in \mathbb{N}}$, a **função geradora ordinária** para esta sequência é definida como a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Exemplo 1.4 *Pela definição de função geradora ordinária acima, vemos que a função dada por*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

é a função geradora para a sequência $a_r = 1$, para $r = 0, 1, 2, 3, \dots$

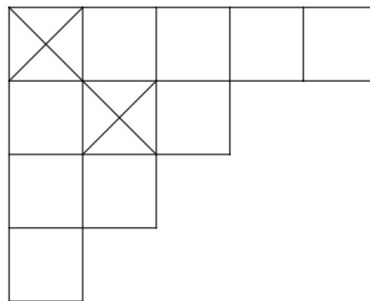
A seguir temos alguns exemplos de funções geradoras para partições de n dadas determinadas restrições:

Figura 1.1: Tabela de exemplos de funções geradoras em partições

Função geradora	Partições de n em partes que são
$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k-1})$	ímpares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}}$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k}}$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k})$	pares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{k^3})$	cubos e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{k^3}}$	cubos

1.2 Representações matriciais

Observando o diagrama de Young de uma partição, podemos através dele, fazer uma representação matricial por meio de uma matriz de duas linhas chamada **símbolo de Frobenius** da partição. Com o auxílio de um exemplo, vejamos como é construído este símbolo: considere o diagrama de Young da partição $5 + 3 + 2 + 1$ de 11 abaixo com sua “diagonal principal” destacada



O símbolo de Frobenius consiste em uma matriz de duas linhas com entradas inteiras não-negativas em ordem decrescente. O número s de entradas em cada linha é dada pelo tamanho do lado do quadrado de Durfee da partição. No exemplo acima temos, $s = 2$. A j -ésima entrada da primeira linha da matriz consiste do número de quadrados da j -ésima linha do diagrama de Young a direita da diagonal principal. A j -ésima entrada da segunda linha da matriz consiste do número de quadrados da j -ésima coluna do diagrama de Young abaixo

da diagonal principal. Desta forma, o símbolo de Frobenius para a partição $5 + 3 + 2 + 1$ é

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir da matriz, podemos facilmente reconstruir a partição.

Novas representações matriciais de partições foram apresentadas em [5]. Estas novas representações contribuíram para que novos resultados da teoria fossem obtidos, bem como novas provas para resultados já existentes. Apresentaremos neste trabalho 3 representações matriciais e iremos nos referir a elas como matrizes dos tipos I, II e III. Concluiremos que existe o mesmo número de matrizes de cada um destes tipos. Os teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 foram extraídos de [5] da maneira como foram apresentados originalmente. E essencialmente, as 3 novas maneiras de representar uma partição via matrizes de duas linhas são detalhadas nas demonstrações destes teoremas e/ou nos exemplos subsequentes a cada resultado que apresentaremos.

Dado n um inteiro positivo, considere P_n o conjunto das matrizes de duas linhas da forma

$$P_n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^s (c_i + d_i) = n; s, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_+, s \neq 0, \forall 1 \leq i \leq s \right\}$$

Definimos a seguir três tipos de matrizes de P_n :

- **Tipo I:** matrizes de P_n tais que $c_s = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.
- **Tipo II:** matrizes de P_n tais que $c_s > 0, c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.
- **Tipo III:** matrizes de P_n tais que $d_t > 0, c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.

Teorema 1.1 *Dado n um inteiro positivo, o número de partições de n é igual o número de matrizes do tipo I.*

Demonstração:

Dada uma partição de n em s partes, digamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$, vamos associar essa partição a uma matriz do tipo I. Para isto, basta dividirmos cada parte λ_i em duas partes, de modo a formar a coluna i da matriz, isto é, $\lambda_i = c_i + d_i$.

Como devemos ter $c_s = 0$, então $d_s = \lambda_s$. Assim, $c_{s-1} = c_s + d_s = \lambda_s$. Então, $\lambda_{s-1} = c_{s-1} + d_{s-1}$, ou seja, $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - \lambda_s$.

Continuando o processo temos $c_{s-2} = c_{s-1} + d_{s-1} = \lambda_{s-1}$ e $d_{s-2} = \lambda_{s-2} - \lambda_{s-1}$ e assim por diante, até obtermos $c_1 = \lambda_2$ e $d_1 = \lambda_1 - \lambda_2$.

Inversamente, dada uma matriz do tipo I, basta que somemos as entradas de cada coluna a fim de obtermos novamente a partição inicial. ■

Exemplo 1.5 A representação matricial do tipo I da partição $7 + 4 + 3 + 1$ de 15 é dada por

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observando a segunda linha da matriz acima, podemos notar que esta nos fornece uma completa descrição da partição conjugada da partição em questão. Note que a segunda linha $(3 \ 1 \ 2 \ 1)$ descreve a partição conjugada $4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ de $7 + 4 + 3 + 1$, pois nos diz o número de $1s$, $2s$, $3s$ e $4s$ da partição conjugada. Inversamente, a segunda linha $(1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ da representação matricial de $4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ descreve a partição $7 + 4 + 3 + 1$, pois nos diz que há uma parte 1, nenhuma parte 2, uma parte 3, uma parte 4, nenhuma parte 5, nenhuma parte 6 e uma parte 7 na partição. Abaixo formalizamos esta conjectura que é válida para todas as representações matriciais do tipo I.

Corolário 1.1 Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ uma partição de n e $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$ a matriz do tipo I associada a partição λ obtida na demonstração do Teorema (1.1). Então

$$\bar{\lambda} = \underbrace{(s, \dots, s)}_{d_s \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{(3, \dots, 3)}_{d_3 \text{ vezes}}, \underbrace{(2, \dots, 2)}_{d_2 \text{ vezes}}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{d_1 \text{ vezes}} \quad (1.1)$$

é a partição conjugada de λ .

Demonstração: A partição conjugada $\bar{\lambda}$ de λ terá como colunas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Assim, o número de linhas do gráfico de Ferrers com apenas um ponto será a diferença entre λ_1 e λ_2 . O número de linhas com exatos dois pontos será a diferença entre λ_2 e λ_3 e assim sucessivamente, até que o número de linhas de $\bar{\lambda}$ com exatamente s pontos será λ_s . Pela demonstração do Teorema 1.1, temos $d_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \forall 1 \leq i \leq s - 1$ e $d_s = \lambda_s$, o que encerra a demonstração. ■

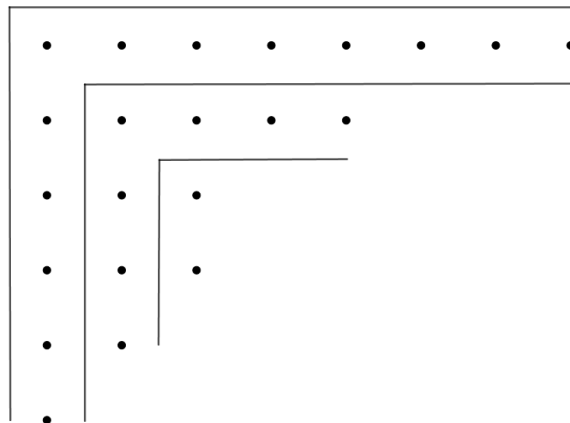
Assim como o teorema anterior, os outros dois teoremas que apresentaremos e que tratam de representações matriciais de partições, se referem a representações matriciais de partições irrestritas. Nos demais capítulos deste trabalho apresentaremos alguns exemplos de representações para partições com restrições, em particular, aquelas envolvidas nas identidades de Rogers-Ramanujan. Omitiremos as demonstrações dos outros dois teoremas de representação. Mais detalhes e as provas destes e outros resultados podem ser encontrados em [5]. Ilustraremos a maneira de representar uma partição de acordo com os resultados através de exemplos.

Teorema 1.2 (Corolário 4.5, [5]) Dado n um inteiro positivo, o número de partições de n é igual o número de matrizes do tipo II.

Abaixo temos a partição $(8, 5, 3, 3, 2, 1)$ de 22 e sua representação matricial do tipo II:

$$(8, 5, 3, 3, 2, 1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com auxílio do gráfico de Ferrers abaixo, no qual marcamos três arcos, torna-se fácil entender a forma com a qual cria-se a representação acima.



Note que o comprimento dos arcos do gráfico acima representam a soma de cada coluna da matriz, ou seja, 13, 7 e 2. Além disso, cada entrada d_i da segunda linha da matriz representa o número de vezes que i aparece como parte da partição em questão, desconsiderando as partes que aparecem no quadrado de Durfee de sua representação gráfica.

Proposição 1.1 *Para cada inteiro positivo n , existe o mesmo número de matrizes dos tipos I, II e III.*

Demonstração: Observe que, dos teoremas 1.1 e 1.2, temos que existe o mesmo número de matrizes dos tipos I e II. Resta mostrarmos que este número de matrizes coincide com o número de matrizes do tipo III existentes. Para provar isso é suficiente criar uma bijeção entre os conjuntos das matrizes do tipo II e matrizes do tipo III.

Seja $B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$ uma matriz genérica do tipo II. Façamos nela a seguinte operação: em cada coluna i de B, subtrairemos 1 da entrada c_i e adicionaremos 1 em sua entrada d_i , ou seja, cada coluna da matriz resultante será da forma: $\begin{pmatrix} c'_i \\ d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i - 1 \\ d_i + 1 \end{pmatrix}$ em que c_i, d_i são as entradas da i -ésima coluna da matriz B.

Feita a operação descrita acima é fácil ver que a matriz resultante é do tipo III, uma vez que $d'_i > 0$ para todo i e além disso,

$$c'_t = c_t - 1 \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1} - 1 = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} = 1 + c'_{t+1} + 1 + d'_{t+1} - 1 = 1 + c'_{t+1} + d'_{t+1},$$

para todo $1 \leq t \leq s - 1$. De maneira análoga a operação feita acima, podemos retornar a matriz B , basta-nos tomar $c_i = c'_i + 1$ e $d_i = d'_i - 1$. ■

Observe que, os teoremas apresentados, assim como, essencialmente, é feito em [5], têm por objetivo principal dar novas representações para partições. A Proposição 1.1 por si só não tem esse mesmo efeito. Trata-se de um resultado que apenas trata da quantidade de matrizes e conseqüentemente da quantidade de partições, isto é, da função $p(n)$. Ou seja, temos tantas partições de n quanto temos de matrizes de cada um dos tipos apresentados. Além disso, vale salientar que apesar da Proposição 1.1 não aparecer em [5], ela é conseqüência direta dos resultados lá apresentados, em especial dos aqui reproduzidos teoremas 1.1, 1.2 e 1.3. Este último será apresentado logo a seguir e apesar de ser colocado logo após a Proposição 1.1, sua demonstração independe dessa proposição.

Teorema 1.3 (Teorema 4.3, [5]) *O número de partições de n é igual o número de matrizes do tipo III.*

Para a demonstração desse resultado, a ideia é construir uma bijeção entre o conjunto das partições de n e o conjunto das matrizes da forma do tipo III.

Apresentamos os passos iniciais da prova seguido de exemplos que ilustram tal bijeção. Para isso reescrevamos a condição $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ da seguinte forma:

$$c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall t < s \tag{1.2}$$

$$c_s = j_s \tag{1.3}$$

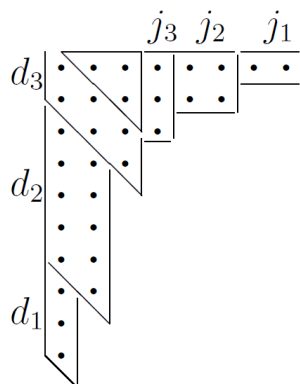
$$j_t \geq 0. \tag{1.4}$$

Queremos definir uma bijeção entre o conjunto das partições de n com quadrado de Durfee de lado s e o conjunto das matrizes do tipo III satisfazendo (1.2), (1.3) e (1.4), com s colunas.

Como exemplo, se $s = 3$, então

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3 & 1 + j_2 + j_3 + d_3 & j_3 \\ & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Compare (1.5) com a figura a seguir:



Observe que separamos o gráfico acima em diferentes conjuntos. Note que d_i é o número de diagonais que estão abaixo ou é a diagonal do quadrado de Durfee e que são paralelas a esta contendo i pontos, enquanto que j_i pode ser visto como a quantidade de pontos que falta para completar cada arco a partir de d_i ou então como o número de vezes que i aparece como parte na partição que se encontra à direita do quadrado de Durfee da partição em questão, porém rotacionada. Vale lembrar que os j_t 's podem ser nulos, porém $d_t > 0$ para qualquer t .

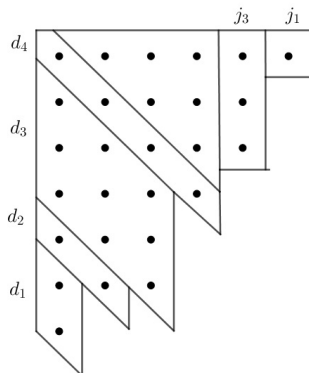
Na figura acima, mostramos o exemplo da partição $\lambda = 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ para a qual $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = 2, j_1 = 2, j_2 = 2$ e $j_3 = 1$. A matriz associada a esta partição é, portanto,

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Como outro exemplo, temos a seguir a representação matricial do tipo III da partição $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 1)$ de 27:

$$(6, 5, 5, 4, 3, 3, 1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para entendermos como foi formada a matriz acima podemos observar o gráfico da partição $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 1)$ abaixo e utilizarmos argumentação análoga ao exemplo anterior.



Exemplo 1.6 *A seguir apresentamos todas as partições de $n = 2, 3, 4$ e suas respectivas representações matriciais para cada uma das construções obtidas nos resultados enunciados acima.*

- $n = 2$

<i>Partição</i>	<i>Símbolo de Frobenius</i>	<i>Matriz do tipo I</i>	<i>Matriz do tipo II</i>	<i>Matriz do tipo III</i>
2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
1 + 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $n = 3$

<i>Partição</i>	<i>Símbolo de Frobenius</i>	<i>Matriz do tipo I</i>	<i>Matriz do tipo II</i>	<i>Matriz do tipo III</i>
3	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2 + 1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- $n = 4$

<i>Partição</i>	<i>Símbolo de Frobenius</i>	<i>Matriz do tipo I</i>	<i>Matriz do tipo II</i>	<i>Matriz do tipo III</i>
4	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3 + 1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2 + 2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

CAPÍTULO 2

IDENTIDADES DE ROGERS-RAMANUJAN

Na teoria das partições, um conceito que contribuiu muito para a evolução da área, bem como trouxe a atenção de muitos matemáticos para esta, foi o conceito de identidade. Afirmações como “o número de partições de n do tipo A é igual o número de partições de n do tipo B ” são chamadas de **identidades em partições**.

Como dito no conceito de identidade, por vezes estamos interessados em partições de n satisfazendo determinada condição A ou B . Desta forma, é comum na teoria, indicar por $p(n \mid *)$ o número de partições de n satisfazendo a condição $*$.

Problemas relacionados a identidades de partições ficaram muito famosos, já que por vezes não é viável o cálculo do número de partições de n para determinadas condições, ou para determinado n grande, porém, através de uma identidade, podemos encontrar famílias de partições que possuem um mesmo número de partições. Por conta disso, diversos problemas relacionados a partições emergiram na teoria e isso acontece corriqueiramente na área, conjecturam-se identidades cujas demonstrações tornam-se problemas em aberto para a teoria e então busca-se a resolução destes problemas.

As identidades de Rogers-Ramanujan intrigaram muitos matemáticos quando surgiram, no início do século XX, uma vez que estas estavam relacionadas aos números primos 5, 7 e 11 e não haviam resultados análogos para demais números primos. A primeira identidade de Rogers-Ramanujan nos diz que

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod{5}) = p(n \mid \text{partes } 2\text{-distintas}),$$

enquanto que a segunda identidade de Rogers-Ramanujan nos diz que

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod{5}) = p(n \mid \text{partes } 2\text{-distintas e } > 1),$$

onde uma partição tem partes 2-distintas se a diferença entre suas partes é de pelo menos 2.

Ainda na atualidade, estas identidades fascinam e promovem muitas discussões na teoria, uma vez que até o momento possuímos apenas provas com o uso de funções geradoras para ambas as identidades, não existindo demonstrações bijetivas para estas.

Conheceremos as funções geradoras para os conjuntos que compõem estas identidades, bem como representações matriciais para as partições que as compõem, além de novos resultados possíveis a partir destas representações. Para mais detalhes e demonstrações dos resultados que omitiremos neste capítulo sugerimos [1].

2.1 Representações matriciais e as identidades de Rogers-Ramanujan

Santos, Mondek e Ribeiro, [5], dão uma caracterização matricial das partições que aparecem nas identidades de Rogers-Ramanujan. Enunciaremos nessa seção os resultados que envolvem essas representações, bem como apresentaremos alguns resultados obtidos por Wagner, [1], analisando tais representações.

2.1.1 Primeira identidade

Consideremos a primeira identidade de Rogers-Ramanujan representada pelas correspondentes funções geradoras:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \cdots, \quad (2.1)$$

em que

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0. \\ (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}), & n \geq 1. \end{cases}$$

$$(a; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = \prod_{n \geq 0} (1 - aq^n).$$

Esta identidade nos diz que o número de partições de n em partes 2-distintas é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

A seguir apresentaremos os resultados que envolvem as representações das partições relacionadas a primeira identidade de Rogers-Ramanujan. Iniciamos pelas matrizes que representam as partições de n em partes 2-distintas.

Teorema 2.1 (Corolário 3.2, [5]) *O número de partições de n com partes 2-distintas é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Exemplo 2.1 *Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual que dois seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 1$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz. Abaixo ilustramos este processo através da apresentação das matrizes das partições $8 + 2$ e $8 + 6 + 4$ respectivamente:*

- *A representação matricial dada para a partição $8 + 2$ de 10 conforme restrições dadas no teorema acima é dada por*
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
- *A representação matricial dada para a partição $8 + 6 + 4$ de 18 conforme restrições do teorema acima é dada por*
$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Segue agora a representação matricial para as partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ dada em [5].

Teorema 2.2 *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \quad \text{se } s \geq 2 \quad \text{e } c_s = 0 \quad \text{se } s = 1; \quad (2.3)$$

$$c_{2i-1} = 5d_{2i+1} + 5d_{2i+3} + \cdots; \quad (2.4)$$

$$c_{2i} = 5\frac{d_{2i+2}}{4} + 5\frac{d_{2i+4}}{4} + \cdots; \quad (2.5)$$

$$4 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é par.} \quad (2.6)$$

Demonstração: Seja R_t o t -ésimo número do conjunto $\{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, \dots\}$ dos números naturais congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Note que, que R_t é um número congruente a $1 \pmod{5}$ se $t = 2i - 1$ e congruente a $4 \pmod{5}$ se $t = 2i \quad \forall i, t \geq 1$, ou seja

$$R_{2i-1} = 5(i-1) + 1 \quad \text{e} \quad R_{2i} = 5(i-1) + 4.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, suponhamos que R_s seja sua maior parte e que s seja um número par (o caso para s ímpar é análogo), daí

$$\begin{aligned} n &= j_1 R_1 + j_2 R_2 + \dots + j_s R_s, \quad \text{com} \quad j_t \geq 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(5 \cdot 0 + 1) + j_2(5 \cdot 0 + 4) + \dots + j_s \left[5 \left(\frac{s-2}{2} \right) + 4 \right] \\ &= 5 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \dots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_{s-1} \right] + (j_1 + j_3 + j_5 + \dots + j_{s-1}) \\ &\quad + 5 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \dots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_s \right] + 4(j_2 + j_4 + j_6 + \dots + j_s). \end{aligned}$$

Então, podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (2.2), satisfazendo as condições de (2.2) até (2.6).

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$, de qualquer matriz do tipo (2.2) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = d_t$ se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{4}$ se t é par. Então, $n = j_1 R_1 + j_2 R_2 + \dots + j_s R_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. ■

Exemplo 2.2 Vamos escrever a matriz associada a partição $9 + 1$ de 10 pelo Teorema 2.2.

Como a maior parte da partição $9 + 1$ é $9 = R_4$ sabemos que a matriz deverá ter 4 colunas. Note que

$$10 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d_1 = j_1 = 1; \quad d_2 = 4j_2 = 4 \cdot 0 = 0; \quad d_3 = j_3 = 0; \quad d_4 = 4 \cdot j_4 = 4 \cdot 1 = 4; \\ c_1 = 5 \cdot d_3 = 0; \quad c_2 = 5 \frac{d_4}{4} = 5; \quad c_3 = 5 \cdot d_5 = 0; \quad c_4 = 5 \frac{d_6}{4} = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$9 + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3 Dada a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos escrever a sua partição associada pelo Teorema 2.2.

Como a matriz possui 3 colunas sabemos que a maior parte da partição é $R_3 = 6$.

Já que $d_t = j_t$ se t é ímpar e $d_t = 4j_t$ se t é par, temos:

$$d_1 = j_1 = 0 \Rightarrow j_1 = 0; \quad d_2 = 4j_2 = 4 \Rightarrow j_2 = 1; \quad d_3 = j_3 = 1.$$

Daí,

$$j_1 R_1 + j_2 R_2 + j_3 + R_3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6.$$

Portanto, a partição procurada é $6 + 4$.

Segue dos resultados acima e da primeira identidade de Rogers-Ramanujan o seguinte corolário:

Corolário 2.1 Existe uma bijeção entre o conjunto das matrizes de duas linhas satisfazendo as condições do Teorema 2.1 e o conjunto de matrizes de duas linhas satisfazendo as condições do Teorema 2.2.

2.1.1.1 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$

Dado um inteiro positivo n e uma partição λ de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, vimos no Teorema 2.2 que podemos associar a essa partição uma matriz de duas linhas. Para tal matriz vamos associar um número inteiro k gerado a partir da seguinte soma envolvendo as entradas d_j da segunda linha da matriz:

$$k = \sum \left(d_{2i-1} + \frac{d_{2i}}{4} \right),$$

ou seja, para obter k basta somar as entradas ímpares com a quarta parte da soma das entradas pares da segunda linha da matriz associada a partição.

Basicamente, o que acabamos de fazer foi associar a cada partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ um número inteiro k . E obviamente esse número inteiro pode se repetir para diferentes partições de um mesmo n . Na Tabela 1, extraída de [1], Wagner organizou esses dados da seguinte forma: a entrada de linha n e coluna $n - k$ corresponde ao número de partições de n associadas a k .

Da demonstração do Teorema 2.2 temos que o número k associado a matriz de duas linhas correspondente a uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, e do qual trata a tabela acima, é exatamente o número de partes dessa partição. Sendo assim, para um melhor entendimento desta tabela podemos definir:

Definição 2.1 Para todo $k \geq 1$, consideramos $p_{\pm 1(5)}(n, k)$, o número de partições de n em k partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Exemplo 2.4 Da definição acima e olhando a linha 11 da Tabela 1, da direita para a esquerda, temos:

$$p_{\pm 1(5)}(11, 1) = 1, p_{\pm 1(5)}(11, 2) = 0, p_{\pm 1(5)}(11, 3) = 2, p_{\pm 1(5)}(11, 4) = 0, p_{\pm 1(5)}(11, 5) = 1, \\ p_{\pm 1(5)}(11, 6) = 1, p_{\pm 1(5)}(11, 7) = 0, p_{\pm 1(5)}(11, 8) = 1, p_{\pm 1(5)}(11, 9) = 0, p_{\pm 1(5)}(11, 10) = 0, \\ p_{\pm 1(5)}(11, 11) = 1.$$

Apresentaremos a seguir alguns resultados obtidos em [1] a partir da observação da Tabela 1.

Proposição 2.1 Para todo $n \geq 2$ e $i \geq 0$ temos que

- i) $p_{\pm 1(5)}(4n - 2, n - 1) = p_{\pm 1(5)}(4n - 2 + i, n - 1 + i)$
- ii) $p_{\pm 1(5)}(4n, n) = p_{\pm 1(5)}(4n + i, n + i)$
- iii) $p_{\pm 1(5)}(4n, n - 1) = p_{\pm 1(5)}(4n + i, n - 1 + i)$

Exemplo 2.5 Para ilustrarmos a bijeção do item (i) da Proposição 2.1 consideremos $n = 5$ e $i = 2$:

$$\begin{array}{c|c} p_{\mp 1(5)}(18, 4) & p_{\mp 1(5)}(20, 6) \\ \hline 9+4+4+1 & 9+4+4+1+1+1 \\ 6+4+4+4 & 6+4+4+4+1+1 \end{array}$$

Ao observarmos a primeira diagonal da Tabela 1, que contabiliza o número de partições com exatamente uma parte congruente a $\pm 1 \pmod{5}$, vemos que $p_{\pm 1(5)}(n, 1) = 1$ se, e somente se, $n \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

E agora observando a segunda diagonal da Tabela 1 temos os seguintes resultados:

Proposição 2.2 Para todo n temos que $p_{\pm 1(5)}(5n, 2) = n$.

Demonstração: Para separarmos $5n$ em exatamente duas partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ temos que uma parte deve ser congruente a $1 \pmod{5}$ e a outra congruente a $4 \pmod{5}$. Com isso, podemos escrever

$$5n = \underbrace{5 + \dots + 5}_{n \text{ vezes}} = (1 + 4) + (1 + 4) + \dots + (1 + 4) + (1 + 4).$$

É notório que se separarmos a soma acima em qualquer lugar entre 1 e 4 e somarmos as partes antes e depois dessa separação teremos novamente duas partes, em que uma será congruente a 1 mod 5 e a outra a 4 mod 5, caso contrário, não teríamos partes congruentes a ± 1 mod 5. Como podemos realizar essa separação de n maneiras diferentes temos que $p_{\pm 1(5)}(5n, 2) = n$ para todo n . ■

Proposição 2.3 *Para todo n temos que*

$$p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2) = p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2) = p(n + 1, 2).$$

Demonstração: Provaremos primeiro a primeira igualdade. Seja $\lambda_1 + \lambda_2$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2)$, é fácil ver que ambas as partes são congruentes a ± 1 mod 5. Por outro lado temos também que a partição $\mu_1 + \mu_2$ contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$ possui ambas as partes congruentes a ± 4 mod 5. Claramente, $(\lambda_1 + 3) + (\lambda_2 + 3)$ será uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$ e $(\mu_1 - 3) + (\mu_2 - 3)$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2)$.

Para provarmos a segunda igualdade, consideramos uma partição $\mu_1 + \mu_2$ contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$, ou seja, sendo $r, s \geq 1$

$$\mu_1 + \mu_2 = 5n + 3$$

$$(5(r - 1) + 4) + (5(s - 1) + 4) = 5n + 3$$

$$(5r - 1) + (5s - 1) = 5n + 3$$

$$r + s = n + 1.$$

Logo, o número desejado é igual o número de partições de n em exatamente duas partes, ou seja $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2) = p(n + 1, 2)$. ■

Olhando os dados da terceira diagonal da Tabela 1, temos os resultados abaixo.

Lema 2.1 *Para todo $n \geq 1$ temos que*

i) *O número de partições de $10n + 1$ em exatamente três partes congruentes a ± 1 mod 5 cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual a n , denotado por*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3) = n$$

ii) *O número de partições de $10n + 6$ em exatamente três partes congruentes a ± 1 mod 5 cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual a $n + 1$, denotado por*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 6, 3) = n + 1$$

Teorema 2.3 *Para todo n temos que:*

$$i) p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3) = n$$

$$ii) p_{\pm 1(5)}(10n + 6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = n + 1$$

Demonstração: Provaremos o primeiro item sendo o outro análogo. Considere a união disjunta $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3) \cup p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$ em que $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ é o conjunto das partições de $10n + 1$ em exatamente 3 partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ cuja a diferença entra as duas maiores é maior ou igual a 5 e $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$ o conjunto das partições de $10n + 1$ em exatamente 3 partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ cuja a diferença entra as duas maiores é menor que 5.

Observe que existe uma bijeção entre o conjunto das partições contadas em $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ e as contadas em $p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$, já que como a diferença entra as duas maiores partes de $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ é maior ou igual a 5, podemos subtrair 5 da maior parte a fim de termos uma partição pertencente a $p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$. Reciprocamente, dada uma partição pertencente a $p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$, se adicionarmos 5 em sua maior parte teremos uma partição pertencente a $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$. Então podemos escrever:

$$\begin{aligned} |p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)| &= |p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)| + |p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)| \\ &= |p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)| + |p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)| \end{aligned}$$

Pelo item (i) do Lema 2.1 temos que $|p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)| = n$, portanto

$$p_{1(5)}(10n + 1, 3) - p_{1(5)}(10n - 4, 3) = n$$

.

■

Corolário 2.2 *Para todo n , sendo T_n o n -ésimo número triangular, temos que*

$$i) p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = 2T_n$$

$$ii) p_{\pm 1(5)}(10n + 6, 3) = T_n + T_{n+1}$$

Demonstração: i) Pelos itens i) e ii) do Teorema 2.3, respectivamente, temos que

$$p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3) = n \tag{2.7}$$

e

$$p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 1, 3) = n \tag{2.8}$$

Substituindo n por $n - 1, n - 2, \dots, 2$ e 1 em (2.7) e (2.8) obtemos a sequência de equações

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-1)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-1)-4, 3) = n-1 \quad (2.9)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+1, 3) = n-1 \quad (2.10)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-2)-4, 3) = n-2 \quad (2.11)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+1, 3) = n-2 \quad (2.12)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-3)-4, 3) = n-3 \quad (2.13)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-4)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-4)+1, 3) = n-3 \quad (2.14)$$

⋮

$$p_{\pm 1(5)}(11, 3) - p_{\pm 1(5)}(6, 3) = 1 \quad (2.15)$$

$$p_{\pm 1(5)}(6, 3) - p_{\pm 1(5)}(1, 3) = 1 \quad (2.16)$$

Somando as equações de (2.7) até (2.16) e observando o fato de que $p_{\pm 1(5)}(1, 3) = 0$ temos

$$p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2 = 2T_n$$

ii) Pelo item anterior, temos que $p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = 2T_n$ e pelo item *ii)* do Teorema 2.3 temos $p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = n+1$. Então somando as duas equações

$$p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) = 2T_n + (n+1) = T_n + T_{n+1}$$

■

Proposição 2.4 *Para todo n temos que*

i) $p_{\pm 1(5)}(5n, 3) = 0$

ii) $p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = p_{\pm 1(5)}(10n+4, 3);$

iii) $p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) = p_{\pm 1(5)}(10n+9, 3).$

Demonstração:

i) As somas abaixo são as possíveis combinações de três números congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, em que $s_1, s_2, s_3 \geq 1$:

- $[5(s_1 - 1) + 1] + [5(s_2 - 1) + 1] + [5(s_3 - 1) + 1] = 5(s_1 + s_2 + s_3 - 3) + 3$;
- $[5(s_1 - 1) + 1] + [5(s_2 - 1) + 1] + [5(s_3 - 1) + 4] = 5(s_1 + s_2 + s_3 - 2) + 1$;
- $[5(s_1 - 1) + 1] + [5(s_2 - 1) + 4] + [5(s_3 - 1) + 4] = 5(s_1 + s_2 + s_3 - 2) + 4$;
- $[5(s_1 - 1) + 4] + [5(s_2 - 1) + 4] + [5(s_3 - 1) + 4] = 5(s_1 + s_2 + s_3 - 1) + 2$.

Como nenhuma delas é congruente a $0 \pmod{5}$, resulta que $p_{\pm 1(5)}(5n, 3) = 0$.

ii) Note que, qualquer partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)$, possui duas partes congruentes a $1 \pmod{5}$ e uma congruente a $4 \pmod{5}$. Por outro lado, qualquer partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 4, 3)$, possui duas partes congruentes a $4 \pmod{5}$ e uma congruente a $1 \pmod{5}$.

Definimos a bijeção entre os dois tipos de partição da seguinte maneira: a partir da parte congruente a $4 \pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)$, adiciona-se 3 na parte congruente a $1 \pmod{5}$ imediatamente menor. Se a parte congruente a $4 \pmod{5}$ for a menor parte adiciona-se 3 na maior parte da partição. Reciprocamente, a partir da parte congruente a $1 \pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 4, 3)$, subtrai-se 3 da parte congruente a $4 \pmod{5}$ imediatamente maior. Se a parte congruente a $1 \pmod{5}$ for a maior parte subtraia-se 3 da menor parte da partição.

iii) Análogo ao item *ii*)

■

A seguir enunciamos mais alguns resultados observados por Wagner envolvendo outras diagonais da Tabela 1. As demonstrações, bem como outros resultados envolvendo observações da tabela podem ser encontrados em [1].

Teorema 2.4 *Para todo n temos que*

$$i) p_{\pm 1(5)}(10n, 4) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$ii) p_{\pm 1(5)}(10n + 5, 4) = 2 \sum_{i=1}^n T_i = 2 \binom{n+2}{3}.$$

Lema 2.2 *O número de partições de $5n + 2$ em quatro partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual ao número de partições de $n - 1$ em até três partes, isto é,*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 2, 4) = p(n - 1, \leq 3).$$

Proposição 2.5 *Para todo n temos que*

$$(a) \quad p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) - p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4) = p(n - 1, \leq 3).$$

$$(b) \quad p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) = p_{\pm 1(5)}(5n + 8, 4) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i, \leq 3).$$

$$(c) \quad p_{\pm 1(5)}(5n + 1, 5) = p_{\pm 1(5)}(5n + 4, 5).$$

$$(d) \quad p_{\pm 1(5)}(5n - 2, 5) = p_{\pm 1(5)}(5n + 7, 5).$$

2.1.2 Segunda identidade

Consideremos a segunda identidade de Rogers-Ramanujan representada pelas correspondentes funções geradoras:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}} = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + \dots \quad (2.17)$$

Esta identidade nos diz que o número de partições de n em partes 2-distintas maiores ou iguais a 2 é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$.

A seguir apresentaremos os resultados que envolvem as representações das partições relacionadas a segunda identidade de Rogers-Ramanujan. Iniciamos pelas matrizes que representam as partições de n em partes 2-distintas maiores ou iguais a 2.

Teorema 2.5 (Corolário 3.4, [5]) *O número de partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual que dois e cada parte é maior ou igual a dois é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Exemplo 2.6 *Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual que dois e cada parte é maior ou igual a dois seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 2$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a*

matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida, $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz. Abaixo ilustramos este processo através da apresentação das matrizes das partições $11 + 7 + 3$ e $13 + 8 + 5$ respectivamente:

- A representação matricial da partição $11 + 7 + 3$ de 21 dadas as restrições do teorema acima é dada por: $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- A representação matricial da partição $13 + 8 + 5$ de 26 dadas as restrições do teorema acima é dada por: $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Segue agora a representação matricial para as partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ dada em [5].

Teorema 2.6 *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0; \quad (2.19)$$

$$c_{2i-1} = 5 \frac{d_{2i+1}}{2} + 5 \frac{d_{2i+3}}{2} + \cdots; \quad (2.20)$$

$$c_{2i} = 5 \frac{d_{2i+2}}{3} + 5 \frac{d_{2i+4}}{3} + \cdots; \quad (2.21)$$

$$2 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é ímpar.} \quad (2.22)$$

$$3 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é par.} \quad (2.23)$$

Demonstração: Seja L_t o t -ésimo inteiro positivo congruente a $\pm 2 \pmod{5}$. Assim, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, temos que:

- Se $t = 2_i - 1$ então $L_t = L_{2_i-1} = 5(i-1) + 2$.
- Se $t = 2_i$ então $L_t = L_{2_i} = 5(i-1) + 3$.

Tomada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, suponhamos que L_s seja a maior parte e que s seja ímpar. Atentamos ao leitor que o caso em que s é par é análogo e pode ser encontrado em [1].

$$\begin{aligned}
 n &= j_1 L_1 + \cdots + j_s L_s \text{ com } j_t \geq 0, \forall t \in [1, s]. \\
 &= j_1(5 \cdot 0 + 2) + j_2(5 \cdot 0 + 3) + j_3(5 \cdot 1 + 2) + j_4(5 \cdot 1 + 3) + \cdots + j_s \left[5 \left(\frac{s-1}{2} \right) + 2 \right] \\
 &= 5 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + \cdots + \left(\frac{s-1}{2} \right) j_s \right] + 2(j_1 + j_3 + \cdots + j_s) \\
 &\quad + 5 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + \cdots + \left(\frac{s-3}{2} \right) j_{s-1} \right] + 2(j_2 + j_4 + \cdots + j_{s-1})
 \end{aligned}$$

É fácil ver que podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (2.18) satisfazendo todas as condições do teorema.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t em que $t \in [1, s]$ de qualquer matriz do tipo (2.18) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = \frac{d_t}{2}$, se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{3}$, se t é par. Então, $n = j_1 L_1 + \cdots + j_s L_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. ■

Exemplo 2.7 Vamos escrever a matriz associada a partição $(17, 12, 12, 7, 3, 3, 3, 2, 2)$ pelo Teorema (2.6).

Primeiro note que:

$$61 = 2.2 + 3.3 + 1.7 + 0.8 + 2.12 + 0.13 + 1.17.$$

Observe que a maior parte da partição em questão é $17 = L_7$ e portanto a matriz que estamos criando deverá possuir sete colunas.

Como $d_t = 2j_t$ se t é ímpar e $d_t = 3j_t$ se t é par, então temos que:

$$d_1 = 2.2 = 4; d_2 = 3.3 = 9; d_3 = 2.1 = 2; d_4 = 3.0 = 0; d_5 = 2.2 = 4; d_6 = 3.0 = 0; d_7 = 2.1 = 2.$$

Como $c_{2i-1} = 5 \frac{d_{2i+1}}{2} + 5 \frac{d_{2i+3}}{2} + \cdots$ e $c_{2i} = 5 \frac{d_{2i+2}}{3} + 5 \frac{d_{2i+4}}{3} + \cdots$ temos que:

$$c_1 = 5 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{2}{2} = 20; c_2 = 5 \cdot \frac{0}{3} + 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_3 = 5 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{2}{2} = 15;$$

$$c_4 = 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_5 = 5 \cdot \frac{2}{2} = 5; c_6 = 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_7 = 5 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto a matriz que queremos escrever é

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 15 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.8 Dada a matriz $\begin{pmatrix} 20 & 0 & 15 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior fazemos o processo inverso, a fim de retornamos a partição.

Como a matriz possui sete colunas, sabemos que a maior parte da partição em questão é $L - 7 = 17$. Além disso, sabemos que $d_t = 2j_t$ se t é ímpar e $d_t = 3j_t$ se t é par, então:

$$j_1 \cdot L_1 + j_2 \cdot L_2 + j_3 \cdot L_3 + j_4 \cdot L_4 + j_5 \cdot L_5 + j_6 \cdot L_6 + j_7 \cdot L_7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 0 \cdot 13 + 1 \cdot 17.$$

Portanto a partição em questão é $(17, 12, 12, 7, 3, 3, 3, 2, 2)$.

Segue dos resultados acima e da segunda identidade de Rogers-Ramanujan o seguinte corolário:

Corolário 2.3 Existe uma bijeção entre o conjunto das matrizes de duas linhas satisfazendo as condições do Teorema 2.5 e o conjunto de matrizes de duas linhas satisfazendo as condições do Teorema 2.6.

2.1.2.1 Partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$

Dado um inteiro positivo n e uma partição λ de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, vimos no Teorema 2.6 que podemos associar a essa partição uma matriz de duas linhas. Para tal matriz vamos associar um número inteiro k gerado a partir da seguinte soma envolvendo as entradas d_j da segunda linha da matriz:

$$k = \sum \left(\frac{d_{2i-1}}{2} + \frac{d_{2i}}{3} \right),$$

ou seja, para obter k basta somar a metade da soma das entradas ímpares com a terça parte da soma das entradas pares da segunda linha da matriz associada a partição.

Basicamente, o que acabamos de fazer foi associar a cada partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ um número inteiro k . E obviamente esse número inteiro pode se repetir para diferentes partições de um mesmo n . Na Tabela 2, extraída de [1], Wagner organizou esses dados da seguinte forma: a entrada de linha n e coluna $n - k$ corresponde ao número de partições de n associadas a k .

Da demonstração do Teorema 2.6 temos que o número k associado a matriz de duas linhas correspondente a uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, e do qual trata a tabela acima, é exatamente o número de partes dessa partição. Sendo assim, para um melhor entendimento desta tabela podemos definir:

Definição 2.2 *Para todo $k \geq 1$, seja $p_{\pm 2(5)}(n, k)$ o número de partições de n em exatamente k partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$*

Exemplo 2.9 *Da definição acima e olhando a linha 11 da Tabela 2, da direita para a esquerda, temos:*

$$p_{\pm 2(5)}(11, 1) = 0, p_{\pm 2(5)}(11, 2) = 1, p_{\pm 2(5)}(11, 3) = 1, p_{\pm 2(5)}(11, 4) = 1, p_{\pm 2(5)}(11, 5) = 1, \\ p_{\pm 2(5)}(11, 6) = 0, p_{\pm 2(5)}(11, 7) = 0, p_{\pm 2(5)}(11, 8) = 0, p_{\pm 2(5)}(11, 9) = 0, p_{\pm 2(5)}(11, 10) = 0, \\ p_{\pm 2(5)}(11, 11) = 0.$$

Apresentaremos a seguir alguns resultados obtidos em [1] a partir da observação da Tabela 2. Alguns dos resultados foram análogos aos das partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, sendo assim, as demonstrações serão omitidas aqui. Todos os resultados que serão apresentados a seguir, bem como os apresentados referentes a Tabela 1 estão demonstrados em [1].

Proposição 2.6 *Para todo n e $i \geq 0$ temos que:*

$$i) p_{\pm 2(5)}(2n + 1 + i, n + 1 + i) = 0;$$

$$ii) p_{\pm 2(5)}(2n, n) = 1.$$

Exemplo 2.10 *Para ilustrarmos a bijeção do item (i) da Proposição 2.6 considere $n = 1$, $i = 1$ e note que de fato não existe nenhuma partição de 4 em três partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. Já para a bijeção do item (ii) da proposição 2.6 tome $n = 1$ e note que a única partição de 2 com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ é a partição 2.*

Através da observação da primeira diagonal da Tabela 2 temos que $p_{\pm 2(5)}(n, 1) = 1$ se, e somente se, $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$. E agora observando a segunda diagonal da Tabela 2 temos os seguintes resultados:

Proposição 2.7 *Para todo n temos que:*

$$i) p_{\pm 2(5)}(5n, 2) = n;$$

$$ii) p_{\pm 2(5)}(10n - 6, 2) = p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2) = n;$$

$$iii) p_{\pm 2(5)}(10n - 4, 2) = p_{\pm 2(5)}(10n + 1, 2) = n.$$

Lema 2.3 *Para todo n temos que:*

- i) O número de partições de $10n + 2$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor de que 5, é igual a n , ou seja,

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 2, 3) = n.$$

- ii) O número de partições de $10n + 7$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor de que 5, é igual a $n + 1$, ou seja,

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 7, 3) = n + 1.$$

Teorema 2.7 Para todo n temos que:

- i) $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3) = n$;
 ii) $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = n + 1$.

Corolário 2.4 Para todo n , sendo T_n o n -ésimo número triangular, temos que:

- i) $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = 2T_n$;
 ii) $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) = T_n + T_{n+1}$.

Proposição 2.8 Para todo n temos que:

- i) $p_{\pm 2(5)}(5n, 3) = 0$;
 ii) $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = p_{\pm 2(5)}(10n + 3, 3)$;
 iii) $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) = p_{\pm 2(5)}(10n + 8, 3)$;
 iv) $p_{\pm 2(5)}(5n + 4, 3) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 3) = p(n + 2, 3)$.

O próximo teorema, que também apresenta uma relação com os números triangulares, foi obtido observando-se os dados da quarta diagonal da Tabela 2.

Teorema 2.8 Para todo $n \geq 1$ temos que:

- i) $p_{\pm 2(5)}(10n, 4) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 ii) $p_{\pm 2(5)}(10n + 5, 4) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i = 2 \binom{n+2}{3}$;

Os próximos resultados também foram obtidos através da observação dos dados da quarta diagonal da Tabela 2 e dependem do lema a seguir.

Lema 2.4 *O número de partições de $5n - 1$ em quatro partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ e cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual ao número de partições de $n - 2$ em até três partes, ou seja,*

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n - 1, 4) = p(n - 2, \leq 3).$$

Proposição 2.9 *Para todo $n \geq 2$ temos:*

$$(a) \quad p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) - p_{\pm 2(5)}(5n - 6, 4) = p(n - 2, \leq 3).$$

$$(b) \quad p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 4) = \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 3).$$

$$(c) \quad p_{\pm 2(5)}(5n - 2, 4) = p_{\pm 2(5)}(5n + 2, 4) = p(n - 2, \leq 4).$$

CAPÍTULO 3

BIJEÇÕES E MAIS ALGUMAS REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS

Neste capítulo pretendemos apresentar mais algumas representações matriciais de partições com restrições e além disso, mostrar que esse novo tipo de representação não se trata apenas de uma maneira diferente de apresentar partições, mas também de uma nova ferramenta para provar resultados dentro da teoria. Iremos utilizar essas representações para mostrar algumas identidades (Teorema 3.2 e Teorema 3.3). Finalizaremos o capítulo apresentando novos caminhos para continuidade dos trabalhos dentro da teoria utilizando a representação matricial. Para isso discutiremos um pouco sobre a identidade de Schur. Para mais resultados, envolvendo identidades em partições e demonstrações envolvendo a representação matricial de partições, sugerimos [2, 7].

3.1 Partições com partes congruentes a 2 mod 4

Nesta seção apresentamos resultados envolvendo partições de um inteiro positivo n em partes congruentes a 2 mod 4. Apresentaremos a representação matricial desse tipo de partição e também ilustraremos a utilização dessas representações matriciais na obtenção de identidades de partições, apresentando uma identidade envolvendo essas partições com partes congruentes a 2 mod 4.

Teorema 3.1 (Resultado 4.1, [7]) *O número de partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

em que $c_s = 2, c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, d_t \equiv 0 \pmod{2}$ e $\sum_i^s (c_i + d_i) = n$.

Para ilustrar a ideia da prova do teorema acima, apresentamos em detalhes o exemplo abaixo, onde dada uma partição com partes congruentes a 2 mod 4, encontramos a matriz de duas linhas associada a essa partição na forma (3.1).

Exemplo 3.1 *Considere a partição (14, 6, 6, 2) de 28. Do fato que todas as partes desta partição são congruentes a 2 mod 4, podemos afirmar que cada uma destas é um múltiplo de 2 por um número ímpar. Desta forma, podemos dividir cada uma destas partes a fim de termos uma partição de 14 em partes ímpares: (7, 3, 3, 1).*

A fim de termos uma partição em partes distintas somamos as partes que se repetem e assim temos então a partição (7, 6, 1). Para concluirmos nossa construção, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.1 (Corolário 5.2, [5]) *Existe uma bijeção entre o conjunto de partições de n em partes distintas e o conjunto de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que $c_s = 1, c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_i^s (c_i + d_i) = n$.

Utilizando o lema acima, podemos associar à partição (7, 6, 1) uma matriz de duas linhas. De maneira análoga a forma com a qual confeccionamos as representações matriciais do tipo 1 na Seção 1.2, temos a representação $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ para a partição (7, 6, 1) dada pelo lema.

Multiplicando cada uma das entradas desta matriz por 2 teremos uma matriz da forma (3.1), ou seja, a representação matricial de (14, 6, 6, 2) na forma (3.1) é

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil observar que o processo inverso nos retorna uma partição em partes congruentes a 2 mod 4.

A representação matricial dada no Teorema 3.1 pode ser utilizada para mostrar a identidade dada pelo teorema a seguir:

Teorema 3.2 (Teorema 4.1, [7]) *O número de partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 é igual ao número de partições $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de n , satisfazendo as seguintes restrições:*

- i) a maior parte λ_1 é par;
- ii) as partes ímpares são menores ou iguais a $\frac{\lambda_1}{2}$;
- iii) cada parte ímpar aparece um número par de vezes;
- iv) se a parte $2k$, $k > 1$, aparece como parte então a parte $2(k-1)$ também aparece;
- v) partes pares maiores que $\frac{\lambda_1}{2}$ aparecem apenas uma vez.

Vamos mostrar a utilização do Teorema 3.1 para justificar o resultado acima através de um exemplo.

Exemplo 3.2 Neste exemplo ilustraremos a identidade do teorema anterior evidenciando uma bijeção entre as partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 e àquelas dadas pelas condições i)–v). Para isso, faremos uso da representação matricial das partições com partes congruentes a 2 mod 4.

Tomemos como exemplo a partição $(14, 6, 6, 2)$ de 28. Sabemos, do Exemplo 3.1, que a representação matricial de $(14, 6, 6, 2)$ é $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Trabalharemos com esta representação matricial, a fim de achar sua partição correspondente a identidade do Teorema 3.2.

Note que toda matriz de duas linhas satisfazendo as condições (3.1) pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + d_2 + \cdots + d_s & (2s-2) + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 4 + d_s & 2 \\ & d_1 & & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2s & 2s-2 & \cdots & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & d_s & 0 \\ & d_1 & & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Por conta disso, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos a primeira matriz de (3.2) como a matriz associada a partição $2s + (2s-2) + \cdots + 4 + 2$ e a segunda como a matriz associada a partição α que possui d_t partes t para todo $1 \leq t \leq s$. Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (6, 4, 2) \text{ e } \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2).$$

Para obtermos uma partição de n que satisfaça as cinco condições do Teorema 3.2 basta juntamos as duas partições que são representadas pelas duas matrizes de (3.2). Para nosso exemplo numérico temos então a partição $(6, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. De maneira inversa retornamos a partição inicial.

3.2 Partições com partes 2-distintas

Nesta seção apresentamos outro resultado envolvendo partições com partes 2-distintas. Por sua vez, sabemos pela primeira identidade de Rogers-Ramanujan que o número de partições de n com partes 2-distintas é igual o número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, logo, temos aqui uma nova identidade envolvendo partições de n com esta restrição.

Teorema 3.3 (Teorema 4.2, [7]) *O número de partições de um inteiro positivo n em partes 2-distintas é igual ao número de partições de n satisfazendo as condições:*

- i) se a parte $2j + 1$, $j > 1$, aparece como parte então a parte $2(j - 1) + 1$ também aparece;*
- ii) cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes;*
- iii) a maior parte é ímpar, $2k - 1$, e cada parte ímpar maior do que k aparece apenas uma vez.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, podemos representar cada partição de um inteiro positivo n em partes 2-distintas como uma matriz de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n . Ou seja, cada uma destas matrizes pode ser vista da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2s - 1 + d_2 + \cdots + d_s & (2s - 1) - 1 + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 3 + d_s & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2s - 1 & 2(s - 1) - 1 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & d_s & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Associamos a matriz à esquerda de (3.3) com a partição $\lambda = (2s - 1), (2(s - 1) - 1), \dots, 1$, enquanto que a matriz da direita relacionamos com a partição μ que possui d_1 partes 1, d_2 partes 2, \dots , d_s partes s . Considerando a partição $\alpha = \lambda \cup \mu$, vemos que α satisfaz *i)*, que cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes e cada parte ímpar maior do que s parece apenas uma vez, em que $2s - 1$ é a sua maior parte. O processo inverso referente ao que foi dito acima nos leva de uma partição satisfazendo as condições *i)*, *ii)* e *iii)* do teorema para uma matriz na forma dada no Teorema 2.1. ■

O exemplo numérico abaixo nos ajuda a compreender o processo inverso da bijeção construída na demonstração acima.

Exemplo 3.3 Considere a partição $\alpha = (13, 11, 9, 7, 6, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$ que satisfaz as condições *i*), *ii*) e *iii*) do Teorema 3.3. Faça $\alpha = \lambda \cup \mu$, sendo $\lambda = (13, 11, 9, 7, 5, 3, 1)$ e $\mu = (6, 5, 2, 2, 1)$. Como a maior parte de λ é $13 = 2 \times 7 - 1$, sabemos que a matriz de duas linhas terá sete linhas. Já a segunda matriz na forma de (3.3) será construída adotando $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 0, d_4 = 0, d_5 = 1, d_6 = 1, d_7 = 0$. Sendo assim, a representação matricial de α , dada pelo Teorema 2.1 será

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 11 & 9 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E pela demonstração do Teorema 2.1 podemos a partir dessa matriz, obter uma partição de n em partes 2-distintas.

3.3 Identidade de Schur

A obtenção de identidades na teoria de partições é algo significativo no desenvolvimento científico da área e muitas dessas identidades tornaram-se famosas ao longo dos anos. Em especial, as identidades de Rogers-Ramanujan tratadas no Capítulo 2. Utilizando como referência o estudo e resultados obtidos sobre estas identidades, naturalmente procura-se fazer pesquisas análogas para outras identidades conhecidas na teoria. Por exemplo, em [4] foi apresentado um processo intuitivo de redescoberta da identidade de Schur, baseado no que foi feito em [6] para as identidades de Rogers-Ramanujan. Assim, naturalmente, ao estudarmos os tópicos do Capítulo 2, várias questões foram surgindo a respeito de outras identidades, em particular a de Schur. Por não ser o foco deste trabalho, apenas apresentamos alguns resultados sobre representação matricial que nos remetem a essa identidade a fim de finalizar esse trabalho, e, de certa forma, ter uma perspectiva de continuidade, já que não concluiremos com resultados mais concretos sobre tal identidade.

Começamos relembrando a identidade de Schur:

Teorema 3.4 (Identidade de Schur) *O número de partições de um inteiro positivo n com partes congruentes a $\pm 1 \pmod 6$ é igual ao número de partições de n em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3.*

Pelo já apresentado no Capítulo 2 e nas duas primeiras seções deste capítulo, dois caminhos naturais se apresentam:

- obter as representações matriciais das partições envolvidas na identidade de Schur;
- obter a representação matricial de um dos tipos de partições da identidade e utilizá-la para buscar uma nova prova bijetiva para o resultado.

Conforme dito anteriormente, por não ser o foco inicial do trabalho, iremos apenas começar esses caminhos. Seguindo as ideias de generalizações dos resultados do Capítulo 2 propostas por Wagner na Seção 2.3 de [1], apresentaremos a seguir a representação matricial das partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod 6$.

Teorema 3.5 *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod 6$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0; \quad (3.5)$$

$$c_{2i-1} = 6d_{2i+1} + 6d_{2i+3} + \cdots; \quad (3.6)$$

$$c_{2i} = 6\frac{d_{2i+2}}{5} + 6\frac{d_{2i+4}}{5} + \cdots; \quad (3.7)$$

$$5 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é par.} \quad (3.8)$$

Demonstração: Seja V_t o t -ésimo número do conjunto $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$ dos números naturais congruentes a $\pm 1 \pmod 6$.

Note que, que V_t é um número congruente a $1 \pmod 6$ se $t = 2i - 1$ e congruente a $1 \pmod 5$ se $t = 2i \quad \forall i, t \geq 1$, ou seja

$$V_{2i-1} = 6(i-1) + 1 \quad \text{e} \quad V_{2i} = 6(i-1) + 5.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod 6$, suponhamos que V_s seja sua maior parte e que s seja um número par (o caso para s ímpar é análogo), daí

$$\begin{aligned} n &= j_1 V_1 + j_2 V_2 + \cdots + j_s V_s, \quad \text{com } j_t \geq 0, \quad \text{para } 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(6 \cdot 0 + 1) + j_2(6 \cdot 0 + 5) + \cdots + j_s \left[6 \left(\frac{s-2}{2} \right) + 5 \right] \\ &= 6 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \cdots + \left(\frac{s-1}{2} \right) j_{s-1} \right] + (j_1 + j_3 + j_5 + \cdots + j_{s-1}) \\ &\quad + 6 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_s \right] + 5(j_2 + j_4 + j_6 + \cdots + j_s). \end{aligned}$$

Então, podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (3.4), satisfazendo as condições de (3.5) até (3.8).

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$, de qualquer matriz do tipo (3.4) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = d_t$ se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{4}$ se t é par. Então, $n = j_1 R_1 + j_2 R_2 + \dots + j_s R_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. ■

Por fim, ainda que não seja a representação matricial do outro tipo de partição envolvida na identidade de Schur, acreditamos que o resultado abaixo, motivado pelo Teorema 2.1, possa ser um ponto de partida para atingir tal objetivo.

Teorema 3.6 *O número de partições de n com partes 3-distintas é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 3 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Demonstração: Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual que três seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 1$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida $c_{s-1} = 3 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz e assim teremos representado matricialmente a partição de n , seguindo as restrições do teorema. Para voltarmos da matriz para a partição basta que somemos as entradas de cada coluna e tomemos o resultado como parte da partição. Desta forma temos uma bijeção para os conjuntos referidos no teorema. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizarmos este trabalho, passamos por conceitos básicos da teoria das partições de inteiros até de fato chegarmos a discussão principal, que consistiu-se na representação matricial de partições. Por meio desta revisão foi possível lembrar, por exemplo, a importância de representações gráficas de partições como os gráficos de Ferrer para a teoria, uma vez que estas nos auxiliaram por muitas vezes nos processos que envolviam bijeções no trabalho, bem como no processo de criação de representações matriciais de partições.

Conhecidas as identidades de Rogers-Ramanujan, demos aos conjuntos que compõem cada uma destas suas respectivas representações matriciais, além de, a partir das duas tabelas apresentadas no texto, enunciarmos e por vezes demonstrarmos alguns resultados que levam em consideração a aparência dos números que compõem estas identidades. Com isso, exemplificamos o quanto as representações matriciais de partições podem contribuir no processo de criação de novas identidades e demonstrações de resultados na teoria.

Por fim, enunciaremos alguns resultados relacionados as partições que compõem a identidade de Schur, inspirados no trabalho realizado no Capítulo 2 em relação as identidades de Rogers-Ramanujan. Nesse momento, levantamos a discussão de que de forma análoga ao trabalho realizado com as identidades de Rogers-Ramanujan podemos dar sequência ao estudo das representações matriciais de partições.

Sendo assim, com a realização deste trabalho ficou clara a importância das representações matriciais para a teoria das partições de inteiros, uma vez que com estas podemos criar novas conjecturas, provar novos resultados, bem como melhorar outros já existentes, constituindo-se assim, uma ferramenta importante para o avanço da teoria. E ainda, ficou evidente, principalmente no fim do Capítulo 3, o quanto ainda pode ser feito na área apenas utilizando tais representações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Wagner, *Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por meio da Representação Matricial*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2016.
- [2] E. H. M. Brietzke, J. P. O. Santos, R. Silva, *Bijjective proofs using two-line matrix representations for partitions*. The Ramanujan Journal, 23, 265-295, 2010.
- [3] I. V. Christ, *A importância dos problemas em matemática: um exemplo na teoria das partições de inteiros*. Trabalho de Conclusão de Curso, DMPA - CCENS - UFES, Alegre, ES, 2020.
- [4] I. V. Christ, V. Martins, *Provas bijetivas e funções geradoras no estudo de partições de inteiros*. Revista de Matemática de Ouro Preto, v. 2, p. 94-137, 2020.
- [5] J. P. O. Santos, P. Mondek, A. C. Ribeiro, *New Two-Line Arrays Representing Partitions*. Annals of Combinatorics, 15, 341-354, 2011.
- [6] J. P. O. Santos, R. Silva, *Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números*. 1. Colóquio de Matemática da Região Sul, UFSM, Santa Maria, RS, 2010.
- [7] R. Silva, *Provas bijetivas através de nova representação matricial para partições*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2009.