UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - EXAME FINAL - 09/07/2018

Questão 1:

(a) A função f será contínua em $(0,0)$ se verificarmos que

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Temos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy - y^3}{x^2+y^2}.$$

Ao longo do eixo x $(y=0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy - y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Ao longo da curva $y = x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy - y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe e daí a função não é contínua em $(0,0)$.

(b) Utilizando a mudança de coordenadas para coordenadas polares, isto é

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

note que

$$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow r \to 0^+,$$

pois $r^2 = x^2 + y^2$. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^3\theta - 2r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r(\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) = 0,$$

pois pela desigualdade triangular

$$0 \leq |\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta| \leq |\cos^3\theta| + 2|\cos\theta||\operatorname{sen}^2\theta| \leq 3,$$

e portanto $(\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta)$ é limitada.

Questão 2:

(a) Seja $F(x,y,z) = x^2z + z^2y - 2xyz - 7$. Sabemos (*do Teorema da Fução Implícita*) que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Temos

$$F_x(x,y,z) = 2xz - 2yz$$
$$F_y(x,y,z) = z^2 - 2xz$$
$$F_z(x,y,z) = x^2 + 2zy - 2xy,$$

Daí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz - 2yz}{x^2 + 2zy - 2xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2 - 2xz}{x^2 + 2zy - 2xy}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1,1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(2,-1,1) = \frac{1}{2}.$$

(b) Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \text{sen} y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x + \text{sen} y) \cdot \cos y.$$

Daí,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\text{sen}(x + \text{sen} y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\text{sen}(x + \text{sen} y) \cdot \cos y.$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos(x + \text{sen} y) \cdot \text{sen}(x + \text{sen} y) \cdot \cos y = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Questão 3: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 8,$$

em que $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2 + 4y^2$. Como $\nabla f(x,y) = (y,x)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$, temos o sistema não-linear

$$\begin{cases} y = 2x\lambda, \\ x = 8y\lambda, \\ x^2 + 4y^2 = 8. \end{cases}$$

cujas soluções são $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$ e $(-2,-1)$. Nesses pontos, temos

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 \qquad \text{e} \qquad f(-2,1) = f(2,-1) = -2.$$

Portanto, o valor máximo de f é 2 enquanto que -2 é o valor mínimo de f sobre a elipse.

Questão 4: Observe que a região de integração W é a região limitada por cima pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2 + 1$ e por baixo pelo plano $z = -4$. No plano xy temos o círculo de equação $x^2 + y^2 = 4$. Usando uma mudança de variáveis para as coordenadas cilíndricas, isto é, $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta$ e $z = z$, temos:

$$W = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -4 \leq z \leq r^2 + 1\}.$$

Portanto, o volume V procurado é

$$V = \iiint_W 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-4}^{r^2+1} r\, dzdrd\theta = 28\pi.$$

Questão 5:

(a)

$$\int_1^e \int_0^{\ln(x)} x^3\, dydx = \int_0^1 \int_{e^y}^e x^3\, dxdy = \frac{3e^4 + 1}{16}.$$

(b) Usando a mudança de variáveis dada por $x = 2u + v$ e $y = u + 2v$ obtemos o jacobiano da mudança de variáveis que será:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 3.$$

Isolando u e v, encontramos

$$u = \frac{1}{3}(2x - y) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{3}(2y - x)$$

A região R será transformada por essa mudança de variáveis em uma região triangular no plano uv com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Daí,

$$I = \iint_R (x - 3y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v)3\, dvdu = -3.$$