UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 1 - 18/04/2018

Questão 1:

(a) Calculando o limite ao longo do eixo x ($y = 0$) temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}0}{x^2} = 0$$

E calculando ao longo da reta $y = x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe.

(b) Utilizando a mudança de coordenadas para coordenadas polares, isto é

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\text{sen}\theta,$$

note que

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow r \to 0^+,$$

pois $r^2 = x^2 + y^2$. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^2\theta\text{sen}^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^2\cos^2\theta\text{sen}^2\theta = 0,$$

pois $\cos^2\theta\text{sen}^2\theta$ é limitada.

(c) O limite não existe. Note, por exemplo, que se calcularmos o limite ao longo do caminho $y = x^2$, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7}{2x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}.$$

Mas este último limite não existe, já que os limites laterais são distintos.

Questão 2: Seja $z = f(x,y)$.

O plano tangente a essa superfície no ponto $(a, b, f(a,b)) = (a, b, a^2 - b^2)$ é dado por

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \Leftrightarrow$$

$$z - a^2 + b^2 = 2a(x-a) - 2b(y-b) \Leftrightarrow$$

$$z = -a^2 + b^2 + 2ax - 2by.$$

na intersecção deste plano com a superfície, teremos

$$z = x^2 - y^2.$$

Daí,

$$x^2 - y^2 = -a^2 + b^2 + 2ax - 2by \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 2ax + x^2 = b^2 - 2by + y^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-a)^2 = (y-b)^2 \Leftrightarrow$$
$$y = x - a + b \quad \text{ou} \quad y = -x + a + b.$$

Estas são retas com inclinação 1 e -1 passando por (a, b), logo são perpendiculares.

Questão 3:

(a) Uma função f de duas variáveis é contínua em um ponto $(a, b) \in D(f)$ se

$$f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

(b) Como queremos determinar L de modo que f seja contínua em $(0, 0)$, devemos determinar L de tal modo que

$$L = f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0.$$

Questão 4:

$$\begin{aligned} F'(t) = \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^{t^2} \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \text{cos}t \end{aligned}$$

Note que

$$t = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{e} \quad y = 0,$$

logo

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot e^0 \cdot 2 \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot \text{cos}0 = 5$$

Questão 5 :

(a) A taxa de variação máxima ocorre na direção do vetor gradiente $\nabla f(1, \sqrt{\pi})$ e seu valor máximo é $||\nabla f(1, \sqrt{\pi})||$.

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = \left(-\frac{\cos(y^2)}{x^2}, -\frac{2y\text{sen}(y^2)}{x} \right)$$
$$\nabla f(1, \sqrt{\pi}) = (1, 0)$$
$$||\nabla f(1, \sqrt{\pi})|| = ||(1,0)|| = 1.$$

(b) Observe que o vetor v não é unitário, logo vamos considerar um vetor $\overline{v}$, unitário, de mesma direção que v, isto é

$$\overline{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Como f é diferenciável, a derivada direcional de f na direção de v no ponto $(1, \sqrt{\pi}))$ será

$$\begin{aligned} D_{\overline{v}}f(1, \sqrt{\pi})) &= \nabla f(1, \sqrt{\pi}) \cdot \overline{v} \\ &= (1, 0) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

(c) Devemos determinar $f_{xx}(1, \sqrt{\pi})$, $f_{yy}(1, \sqrt{\pi})$, $f_{xy}(1, \sqrt{\pi})$ e $f_{yx}(1, \sqrt{\pi})$.

$$f_x(x, y) = -\frac{\cos(y^2)}{x^2} \qquad f_y(x, y) = -\frac{2y\mathrm{sen}(y^2)}{x}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2\cos(y^2)}{x^3} \qquad f_{yy}(x, y) = -\frac{2}{x}\left(\mathrm{sen}(y^2) + 2y^2\cos(y^2)\right)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{2y\mathrm{sen}(y^2)}{x^2} = f_{yx}(x, y)$$

Daí,

$$f_{xx}(1, \sqrt{\pi}) = -2$$

$$f_{yy}(1, \sqrt{\pi}) = 4\pi$$

$$f_{xy}(1, \sqrt{\pi}) = 0 = f_{yx}(1, \sqrt{\pi}).$$

Questão 6 : Seja $F(x, y, z) = x^2z + z^2y - 2xyz - 7$. Sabemos (*do Teorema da Fução Implícita*) que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Temos

$$F_x(x, y, z) = 2xz - 2yz$$

$$F_y(x, y, z) = z^2 - 2xz$$

$$F_z(x, y, z) = x^2 + 2zy - 2xy,$$

Portanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz - 2yz}{x^2 + 2zy - 2xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2 - 2xz}{x^2 + 2zy - 2xy}.$$