UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 9: Base e dimensão

Ementa: Definição e exemplos de base de um espaço vetorial; dimensão de um espaço vetorial.
Objetivos: Compreender procedimentos para determinar a base de um espaço vetorial. Saber verificar se um dado conjunto é ou não uma base de um dado espaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma **base** do espaço vetorial V se:

(i) B é LI;

(ii) B gera V.

Além disso, se V possui uma base com n vetores, dizemos que V tem **dimensão** n e indicamos por $dimV = n$. O espaço vetorial $\{\vec{0}\}$ tem dimensão zero.

1 Propriedades

- Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for base de um espaço vetorial V, então todo subconjunto de V com mais de n vetores é LD;
- Duas bases quaisquer de um espaço vetorial V têm o mesmo número de vetores;
- Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, qualquer vetor $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de B;
- Se W é um subespaço vetorial de V então $dimW \leq dimV$ e a igualdade só ocorre se $W = V$;

2 Exemplos

Exemplo 1 *Mostremos que* $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$.

De fato, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ *é linearmente independente, já que a equação*

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$$

só é válida para $\alpha_1=\alpha_2=0$*. Além disso, o conjunto gera todo o* $\mathbb{R}^2$*. Para mostrarmos que gera, basta mostrarmos que qualquer vetor* $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como combinação linear de* $\{(1,0),(0,1)\}$*.*

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

Logo, $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^2$*. E portanto a dimensão de* $\mathbb{R}^2$ *é igual a 2.*

Exemplo 2 *Seja* $B=\{(1,1),(0,1)\}$*. Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,1)=(0,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$$

O sistema tem solução única: $\alpha_1=\alpha_2=0$*. Logo,* $B=\{(1,1),(0,1)\}$ *é LI.*

Além disso, precisamos verificar se $\{(1,1),(0,1)\}$ *gera todo o* $\mathbb{R}^2$*. Note que, todo vetor* $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como combinação linear de* B*.*

$$(x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$$

Assim, $\{(1,1),(0,1)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 3 *Seja* $B=\{(2,1),(1,0),(0,1)\}$*. Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Note que, podemos escrever o vetor $(2,1)$ *como combinação linear de* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *da seguinte forma:*

$$(2,1)=2(1,0)+1(0,1)$$

Portanto, temos que $B=\{(2,1),(1,0),(0,1)\}$ *não é LI, logo não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 4 *Seja* $\{1,x-1,x^2-3x+1\}$*. Verifique se o conjunto é uma base para* $P_2(\mathbb{R})$*.*

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha(1)+\beta(x-1)+\gamma(x^2-3x+1)=0+0x+0x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta x - \beta + \gamma x^2 - 3\gamma x + \gamma = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0 + 0x + 0x^2,$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 0 = 0 \\ \beta - 3.0 = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Como o sistema tem somente a solução trivial, concluimos que o conjunto é linearmente independente.

Além disso, precisamos verificar se $\{1, x-1, x^2-3x+1\}$ *gera todo o conjunto* $P_2(\mathbb{R})$. *Note que, todo polinômio* $ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como combinação linear de* B.

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2 - 3x + 1).$$

Obtemos:

$$\begin{cases} a = \gamma \\ b = \beta - 3\gamma \\ c = \alpha - \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \beta - 3a \\ c = \alpha - \beta + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3a = \beta \\ c = \alpha - \beta + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3a = \beta \\ c = \alpha - (b + 3a) + a \end{cases}$$

Temos $c = \alpha - b - 3a + a \Rightarrow \alpha = c + b - 2a$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Logo,* $\{1, x-1, x^2-3x+1\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$. *E* $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$.

Exemplo 5 *Seja* $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. *Determine se* B *é uma base para* $M_2(\mathbb{R})$.

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases}$$

Note que, o sistema só tem solução quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. *Logo, o conjunto* B *é linearmente independente.*

Além disso,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{b-a}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{a+b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo B *gera* $M_2(\mathbb{R})$. *Portanto* B *é base de* $M_2(\mathbb{R})$ *e* $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Exemplo 6 *Seja* $B = \{(1,2,1),(1,3,0),(0,1,-1)\}$. *Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Note que, podemos escrever o vetor $(0,1,-1)$ *como combinação linear de* $(1,2,1)$ *e* $(1,3,0)$ *da seguinte forma:*

$$(0,1,-1) = 1(1,3,0) - 1(1,2,1)$$

Portanto, temos que $B = \{(1,2,1),(1,3,0),(0,1,-1)\}$ *é linearmente dependente, logo não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 7 *Seja* $B = \{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0),(2,5,4)\}$. *Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Note que, podemos escrever o vetor $(2,5,4)$ *como combinação linear de* $(1,1,1),(0,1,2)$ *e* $(0,2,0)$ *da seguinte forma*

$$1(0,1,2) + 2(1,1,1) + 1(0,2,0) = (2,5,4).$$

Portanto, temos que $B = \{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0),(2,5,4)\}$ *é linearmente dependente. Logo, não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 8 $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a* n, $P_n(\mathbb{R})$, *conhecida como* ***base canônica*** *de* $P_n(\mathbb{R})$.

E de fato, o conjunto $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é linearmente independente uma vez que vale a equação:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$$

somente quando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *pois dois polinômios só são iguais se todos os coeficientes correspondentes são iguais.*

Também verifica-se que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *gera todo o espaço de polinômios de grau menor ou igual que* n, *uma vez que qualquer* $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como:* $\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + ... + \beta_n x^n$. *Logo,* $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base de* $P_n(\mathbb{R})$. *Além disso,* $dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

3 Exercícios

Determine quais dos seguintes subconjuntos formam uma base para os determinados espaços vetoriais.

(1) $S = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(2) $S = \{2x^2 + x - 4, x^2 - 3x + 1\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

(3) $S = \{(1,0,-1),(1,1,1),(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(4) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(5) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(6) $S = \{1, x, x^2\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

(7) $S = \{(2,0,1), (3,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(8) $S = \{2, 1-x, 2x^3+x-1, x^3-2x^2-3\} \subset P_3(\mathbb{R})$.

(9) $S = \{(1,0,1,3), (2,0,1,0), (1,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(10) $S = \{1+x, x-x^2, 1+2x-x^2\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.