UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 10: Operadores lineares

(1) Seja $T : V \to V$ um operador linear, com $dimV = n$ e, para algum $v \in V$, tem-se

$$T^n(v) = 0 \quad \text{e} \quad T^{n-1}(v) \neq 0.$$

Mostre que

$$\{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}(v)\}$$

é uma base de V.

(2) Um operador linear $T : V \to V$ é dito **nilpotente** se existe um inteiro positivo n tal que $T^n = 0$ é a transformação nula. O menor inteiro positivo n tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$ é chamado **índice de nilpotência** de T. Se T é um operador não nulo e nilppotente, determine todos os possíveis autovalores de T.

(3) Um operador linear $T : V \to V$ é dito **idempotente** se $T^2 = T$. Encontre os possíveis valores para os autovalores de T.

(4) Mostre que, se T é um isomorfismo, então λ é autovalor de T se, e somente se, $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de T^{-1}.

(5) Seja $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T. Mostre que o autoespaço V_λ de T associado a λ é um subespaço vetorial de V.

(6) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$.

(a) Encontre a matriz A que representa T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(b) Encontre os autovalores λ_1, λ_2 de A e seus respectivos autovetores associados v_1, v_2.

(c) Encontre a matriz que representa T na base $\{v_1, v_2\}$, formada pelos autovetores encontrados acima.

(7) Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mostre que:

(a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são LI.

(b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI.

(8) Determine os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$.

(c) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$.

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, x)$.

(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$.

(g) $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, onde D é o operador derivada.

(9) Determine os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores cujas matrizes na base canônica são:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(10) Determine $T(x, y, z)$ sabendo que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador linear com autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, dados por $\{(x, x + y, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\{(0, x, 2x) : \ x \in \mathbb{R}\}$, respectivamente.

(11) Os autovalores de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$, sendo $v_1 = (1, 1, 1,)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ os respectivos autovetores associados. Determine $T(x, y, z)$.

(12) Seja T um operador cuja matriz na base canônica é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine o polinômio característico de T.

(b) Determine os autovalores de T.

(c) Determine os autovetores de T.

(13) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Verifique se T é diagonalizável.

(14) **Verdadeiro ou falso:** se T é diagonalizável e T é isomorfismo, então T^{-1} é diagonalizável.

(15) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (2x - 2y, -x + 3y)$. Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

(16) Sejam S e T operadores lineares tais que $S \circ T = T \circ S$. Seja λ um autovalor de T e seja W o autoespaço de T associado a λ. Mostre que W é invariante sob S, isto é, $S(W) \subset W$.

(17) Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então A e A^t têm os mesmos autovalores.

(18) Quais dos operadores lineares do Exercício 8 são diagonalizáveis? Para os que forem diagonalizáveis encontre sua matriz na forma diagonal.