UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra Linear II***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 3: Espaço Dual

(1) (a) Defina espaço dual.

(b) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, defina $f_i : V \to \mathbb{K}$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Mostre que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ é uma base de V^*.

(2) Seja $S \subset V$. Defina anulador de S.

(3) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Prove que:

(a) $S \subset V \Rightarrow S^0 \leq V^*$;

(b) $S = \{0\} \Rightarrow S^0 = V^*$;

(c) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$;

(d) $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^0 \subset S_1^0$.

(4) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado. Se $W \leq V$ mostre que

$$\dim V = \dim W + \dim W^0.$$

(5) (a) Seja $T \in \mathfrak{L}(U, V)$. Defina a transposta de T.

(b) Mostre que $N(T^t) = (ImT)^0$.

(c) Se U e V são finitamente gerados, mostre que $\dim ImT^t = \dim ImT$.

(6) Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidaas por

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx, \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)dx.$$

(a) Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^*.

(b) Exiba uma base de V da qual $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja a base dual.

(7) Considere o $\mathbb{C}$- espaço vetorial $\mathbb{C}^3$. Dada a base $\mathfrak{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ de $\mathbb{C}^3$, determine a base dual $\mathfrak{B}^*$.

(8) Seja $W \subset (\mathbb{R})^4$ um subespaço formado pelos funcionais $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tais que $N(f)$ contém os vetores $(1, 0, 3, -2)$ e $(0, 1, 3, 0)$. Ache uma base de W.

(9) Sejam $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e $W = [u_1, u_2]$. Determine os funcionais lineares que estão no anulador de W.

(10) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$. Mostre que se $W \leq V$ e $W = [S]$ então $S^0 = W^0$.

(11) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado e W_1 e W_2 subespaços de V. Mostre que:

(a) $W_1 = W_2$ se, e somente se, $W_1^0 = W_2^0$.

(b) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

(c) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.