UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra Linear II***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 4: Operadores Lineares

(1) (a) Defina operador linear.

(b) Defina matrizes semelhantes.

(c) Mostre que a relação definida por

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad A \sim B \Leftrightarrow A \quad \text{e} \quad B \quad \text{são semelhantes}$$

é uma relação de equivalência.

(d) Defina subespaço invariante.

(e) Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, $T(x, y) = (y, -x)$. Mostre que os subespaços invariantes por T são os triviais.

(2) Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^5)$, tal que $[T]_{\mathcal{B}} = diag(-1, 2, 2, 0, 0)$, sendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ uma base de $\mathbb{R}^5$.

(a) Calcule $\text{tr}(T), \det(T)$, $posto(T)$ e $nulidade(T)$;

(b) Encontre uma base para $N(T)$ e $Im(T)$;

(c) Seja $T_1 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^5)$ tal que $[T_1]_{\mathcal{B}_1} = diag(1, -2, -2, 0, 0)$, sendo $\mathcal{B}_1$ uma base de $\mathbb{R}^5$. T_1 é semelhante a T?

(d) Seja $T_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^5)$ tal que $[T_2]_{\mathcal{B}_2} = diag(2, 0, 2, -1, 0)$, sendo $\mathcal{B}_2$ uma base de $\mathbb{R}^5$. T_2 é semelhante a T?

(3) Determine todos os subespaços invariantes por T para $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por:

(a) $T(x, y) = (-x + 2y, 2x - 3y)$;

(b) $T(x, y) = (2x - 5y, x + 2y)$.

(4) (a) Defina autovalor de um operador T;

(b) Defina autoespaço de T associado a um autovalor λ.

(c) Defina autovetor de T associado a um autovalor.

(d) Mostre que o autoespaço de T associado a um autovalor λ é de fato um subespaço vetorial.

(e) O que significa dizer que um operador linear é diagonalizável? Dê todas as equivalências que você conhece para essa definição.

(5) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado e $T \in \mathfrak{L}(V)$. Mostre que são equivalente:

(a) λ é autovalor de T;;

(b) $T - \lambda I$ não é isomorfismo;

(c) $p_T(\lambda) = 0$, onde $p_T(x)$ é o polinômio característico de T.

(6) (a) Defina multiplicidade algébroca e multiplicidade geométrica de um autovalor λ de T.

(b) Defina polinômio minimal de T.

(7) Enuncie e prove o Teorema da Decomposição Primária.

(8) Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$T(x, y, z) = \left(2x, \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z\right).$$

Encontre:

(a) o polinômio característico de T;

(b) os autovalores de T;

(c) os autoespaços de T;

(d) uma base $\mathcal{B}$ de V formada por autovetores de T e $[T]_{\mathcal{B}}$.

(9) Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $T \in \mathfrak{L}(V)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x + x^2\}$.

(a) Encontre o polinômio característico de T.

(b) Verifique se T é diagonalizável. Caso seja, encontre uma base de V formada por autovetores de T.

(10) Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $T \in \mathfrak{L}(V)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1x^2\}$ e $\mathcal{C} = \{x, 1 + x + x^2, 1 - x\}$.

(a) Encontre o polinômio característico de T.

(b) Verifique se T é diagonalizável. Caso seja, encontre uma base de V formada por autovetores de T.

(11) Quais formas de Jordan são possíveis para um operador $T \in \mathfrak{L}(V)$ tal que:

(a) $p_T(x) = (x-2)^3(x+7)^2$ e $m_T(x) = (x-2)^2(x+7)$.

(b) $p_T(x) = (x+2)^4(x-1)^2$.

(c) $p_T(x) = (x-3)^5(x-2)^4$ e $m_T(x) = (x-3)^3(x-2)^2$.

(12) Consideremos os operadores $T_i \in \mathfrak{L}(V)$, $i = 1, 2, 3$ definidos por:

(A) $T_1(x, y, z, w) = (3x, 3y, 2x - 7y + z + w, -5x + 2y - z + 3w)$.

(B) $T_2(x, y, z, w) = (3x - y + z - 7w, 9x - 3y - 7z - w, 4z - 8w, 2z - 4w)$.

(C) $T_3(x, y, z, w) = (3x + y, -4x - y, 7x + y + 2z + w, -17x - 6y - z)$.

Para cada i, encontre o que se pede a seguir para T_i:

(a) Os polinômios característico e minimal.

(b) A decomposição de V em subespaços T_i-invariantes dada pela decomposição primária.

(c) A decomposição cíclica de V adaptada à decomposição primária.

(d) Uma base $\mathcal{B}$ de V de forma que $[T_i]_{\mathcal{B}}$ esteja na forma de Jordan.

(e) A forma de Jordan de T_i.