UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - (CCENS)

Prova final - 25/07/2023 **Disciplina:** Álgebra I Prof. Victor Martins

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: *(2,0 pontos)* Faça a correspondência dos itens para classificar os conjuntos indicados de acordo com as definições dadas:

(A) Não é um anel.

(B) Anel comutativo, sem unidade

(C) Anel comutativo, com unidade

(D) Anel não comutativo, sem unidade

(E) Anel não comutativo, com unidade

( ) Matrizes quadradas de ordem 3 com entradas reais, $M_3(\mathbb{R})$.

( ) Conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com as operações $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

( ) Conjunto de todos os inteiros pares com as operações usuais de adição e mutiplicação.

( ) Conjunto $\mathbb{Z}_n$ dos inteiros módulo n com as operações usuais.

( ) Conjunto dos números naturais.

( ) Conjunto dos polinômios em uma incógnita com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

( ) Conjunto de todas as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Questão 2: *(1,5 pontos)* Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Para cada $a \in \mathbb{K}$ não nulo, defina $f_a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ por $f_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que f_a é um isomorfismo.

Questão 3: Seja A um anel comutativo com unidade $1 \in A$, e seja P um ideal de A. Dizemos que P é um **ideal primo** de A se $P \neq A$ e para todos $x, y \in A$, se $x \cdot y \in P$ então $x \in P$ ou $y \in P$.

(a) *(1,0 ponto)* Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis e P um ideal primo de B. Mostre que $f^{-1}(P) = \{x \in A : \; f(x) \in P\}$ é um ideal primo de A.

(b) *(1,0 ponto)* Mostre que se n é primo, $n\mathbb{Z}$ é um ideal primo em $\mathbb{Z}$.

Questão 4: Mostre que:

(a) *(1,0 ponto)* se n é um número primo, então o ideal $I = n\mathbb{Z}$ é um ideal maximal em $\mathbb{Z}$.

(b) *(1,0 ponto)* se $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, com $\mathbb{K}$ corpo, e $p(x)$ é de grau 2 ou 3, então $p(x)$ é redutível sobre $\mathbb{K}$ se e só se existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Questão 5: *(2,5 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. **Demonstre** ou dê um **contraexemplo**, para justificar sua resposta.

(a) ( ) $x^2 - 2x + 2$ é redutível sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{3}i]$.

(b) ( ) $8x^3 - 6x - 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

(c) ( ) $\mathbb{Z}_{15}$ possui 6 divisores de zero.

(d) ( ) Como $\mathbb{Z}_5$ é corpo, então $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{J}$ também é um corpo para qualquer ideal J de $\mathbb{Z}_5[x]$.

(e) ( ) $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, mas é redutível sobre $\mathbb{Z}_{13}$.

BOA PROVA!