UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II (2024/1)***
Prof^{o}. Victor Martins

Lista de exercícios: Integrais duplas e triplas

(1) (a) Enuncie o Teorema de Fubini para integrais duplas.

(b) Calcule $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA$, onde $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Calcule $\displaystyle\iint_R y \operatorname{sen}(xy) \, dA$, onde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

(2) (a) Defina os limites de integração para a integral $\displaystyle\iint_D f(x, y) \, dA$, sendo D a região do plano xy limitada pelas curvas $y = 0$ e $y = 1 - x^2$.

(b) Inverta a ordem de integração na integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) \, dxdy$.

(3) Em cada caso, esboce a região de integração e calcule a integral.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2 y^2 \, dxdy$

(b) $\displaystyle\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y) \, dydx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} \, dxdy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} \, dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1 + y^3} \, dydx$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} \, dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2 \, dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \operatorname{sen} x \, dxdy$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} x}{y} \, dydx$

(4) Calcule a integral dupla iterada $\int_1^e \int_0^{\ln(x)} x^3\, dydx$ invertendo a ordem de integração.

(5) Calcule a integral trocando a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\, dydx$

(6) Utilizando integral dupla, calcule a área da região delimitada pelas curvas $x = y^2 - 1$ e $x = 2y^2 - 2$.

(7) Utilizando integral dupla, calcule a área da região delimitada pelas curvas $x^2 + 2y = 16$ e $x + 2y = 4$.

(8) Calcule, utilizando integrais duplas, a área limitada pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(9) Calcule a integral $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$, fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

(10) Calcule a integral $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ e $(0, 1)$.

(11) Utiliza a transformação $(x = \frac{u}{v}; y = v)$ para calcular a integral $\displaystyle\iint_R xydA$, em que R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$.

(12) Determine o volume do sólido:

(a) Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

(b) abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$.

(13) Calcule o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x = y^2$ $(z \in \mathbb{R})$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

(14) Calcule o volume do tetraedro delimitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelos planos coordenados.

(15) Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(16) Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xydydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

em uma única integral dupla. Em seguida, calcule a integral dupla.

(17) Calcule $\displaystyle\iiint_Q 12xy^2z^3\,dV$ na caixa retangular $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3,\; 0 \leq z \leq 2\}$.

(18) Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

(19) Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_T x^2\,dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

(20) Calcule, utilizando integrais triplas, o volume do sólido limitado pelo cilindor $x^2+y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $x + y + z = 3$.

(21) Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2+y^2 = 9$ e entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

(22) Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_E x\,dV$, onde E é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

(23) Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado por $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

(24) Encontre o volume da região sólida limitada abaixo pelo plano $z = 0$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

(25) Determine o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 3$.

(26) Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(27) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{(1-\cos\phi)}{2}} \rho^2 \text{sen}\phi d\rho d\phi d\theta$ em coordenadas esféricas.

(28) Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada para determinar o volume da região limitada acima pelo parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$.

(29) Usando coordenadas esféricas, determine o volume da região cortada do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.