Prova 2 - (Extra) - 23/08/2024

1) b) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6x, 3y^2 - 3)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0$$

$x = 0$ ou $x = 1$

Pontos críticos

$(0,1), (0,-1), (1,1), (1,-1)$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

- $H(0,1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36$

$(0,1)$ é ponto de sela

- $H(0,-1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36$

$f(0,-1)$ é valor de máximo local

- $H(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36$

$f(1,1)$ é valor de mínimo local

- $H(1,-1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36$

$(1,-1)$ é ponto de sela

———— // ————

2) b) $f(x,y) = xy + 3x - 2$

$F(x,y,z) = xy + 3x - 2 - z$

$F(x,y,z) = 0$

Plano tangente em $P(a,b,c)$

$\nabla F(a,b,c)\,(x-a,\, y-b,\, z-c) = 0$

$(b+3,\, a,\, -1)(x-a,\, y-b,\, z-c) = 0$

$\nabla F(a,b,c) \,//\, v$,

onde v é o vetor normal ao plano xy $(z=0)$.

$v = (0,0,1)$

Logo

$(b+3,\, a,\, -1) \,//\, (0,0,1)$

Daí

$(b+3,\, a,\, -1) = -1\,(0,0,1) \Rightarrow$

$b+3=0 \Rightarrow b=-3$

$a=0$

$\therefore$ a equação do plano tangente procurado será:

$(b+3, a, -1)(x-a, y-b, z-c)=0$

$(0,0,-1)(x-0, y+3, z-f(0,-3))=0$

$-z+f(0,-3)=0$

$-z-2=0 \Rightarrow \boxed{z=-2}$ //

—— // ——

3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\leq 1\}$

$f(x,y)=x+y^2$

- No interior do disco

$\nabla f(x,y)=(1,2y)$

$\nabla f(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ Absurdo

Não existem pontos críticos

- Na fronteira: $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1, 2y) = \lambda (2x-4, 2y) \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x - 4\lambda \\ 2y = \lambda 2y \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y(1-\lambda) = 0$$

$y = 0$ ou $\lambda = 1$

- $y = 0 \Rightarrow x - 2 = \pm 1 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$

$\bullet\ \lambda = 1$

$1 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{5}{2} - 2\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Pontos:

$(3, 0), (1, 0), \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f(3,0) = 3$

$f(1,0) = 1$

$f\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$

$f\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{13}{4}$

Portanto,

valor máximo

$$f\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

valor mínimo

$$f(1,0) = 1$$

—————— // ——————

4) $f(x,y) = x e^{y^2}$

a) $\nabla f(x,y) = \left(e^{y^2}, \ 2xy e^{y^2}\right)$

Direção da variação máxima:

$$\nabla f(1,1) = (e, 2e)$$

Taxa de variação máxima

$$\|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{e^2+4e^2} = e\sqrt{5}$$

b) $D_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \dfrac{v}{\|v\|}$

$$= (e, 2e) \cdot (1,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} (e + 6e)$$

$$= \frac{7e}{\sqrt{10}}$$

c) $f_{xx}(x,y) = 0$

$$f_{xx}(1,1) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = 2ye^{y^2}$$

$$f_{xy}(1,1) = 2e$$

$$f_{yy}(x,y) = 2xe^{y^2} + 4xy^2 e^{y^2}$$

$$f_{yy}(1,1) = 2e + 4e$$

$$= 6e$$