UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*
Prof. *Victor Martins*

Gabarito - Teste 2 - 18/10/2018

Questão 1:

(a) Um ponto (a, b) no domínio de uma função real de duas variáveis reais $f(x, y)$ é chamado um **ponto crítico** de f se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ ou se $\nabla f(a, b)$ não existe.

(b) Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais. $f(a, b)$ é dito um **valor máximo local** de f se $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in B((a, b), r)$ para algum $r > 0$.

(c) **Teste da Derivada Segunda:** Suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Seja

$$H = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2.$$

(i) Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um valor mínimo local de f.

(ii) Se $H > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um valor máximo local de f.

(iii) Se $H < 0$, então (a, b) é um ponto de sela de f.

Se $H = 0$, o teste não nos dá nenhuma informação sobre f em (a, b).

Questão 2: Vamos utilizar o teste da derivada segunda para determinar e classificar os pontos críticos de

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

Calculando as derivadas parciais de f e o determinante da matriz Hessiana $H(x, y)$, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 12y; \quad f_y(x, y) = -12x + 24y^2;$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x; \quad f_{yy}(x, y) = 48y; \quad f_{xy}(x, y) = -12.$$

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 288xy - 144.$$

Determinemos agora os pontos críticos de f, isto é, os pontos (x, y) do domínio de f tais que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ou onde o gradiente não existe.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} .$$

Da segunda equação vemos que $x = 2y^2$. Substituindo na primeira equação, temos

$$4y^4 = 4y \Leftrightarrow y(y^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1.$$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$ e se $y = 1 \Rightarrow x = 2$.

Pontos críticos: $(0,0), (2,1)$.

Fazendo o teste da derivada segunda, temos:

$$H(0,0) = -144 < 0 \Rightarrow (0,0) \quad \text{é ponto de sela.}$$

$$H(2,1) = 12 \cdot 48 - 144 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow (2,1) \quad \text{é ponto de mínimo local.}$$

Questão 3: Queremos encontrar um ponto (x, y) da reta $x + 2y = 1$ tal que o produto $p(x, y) = xy$ seja máximo. Logo temos um problema de determinar um máximo dada uma restrição. Vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x, y) = x + 2y$. Então temos:

$$\begin{cases} \nabla p(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Usando a primeira e a segunda equações obtemos $x = 2y$. Substituindo o obtido na terceira equação obtemos $x = \dfrac{1}{2}$ e daí $y = \dfrac{1}{4}$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange obtemos que o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ é um ponto de máximo ou mínimo de p dada a restrição. No entanto, observe que $(1,0)$ satisfaz a equação da reta e

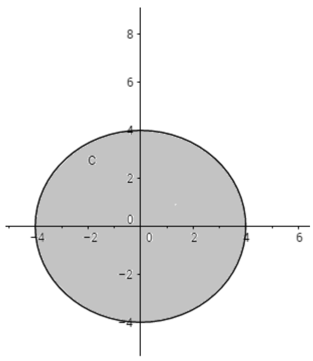
$$f(1,0) = 0 < \frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Portanto o ponto encontrado é um ponto de máximo de p, dada a restrição.

Questão 4: Queremos determinar os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

na região esboçada abaixo:



Vamos utilizar o algoritmo para determinar os valores extremos de uma função de duas variáveis em um conjunto fechado e limitado.

(i) Determinação dos pontos críticos de f no interior da região dada:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (4x-4, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

(ii) Valores de f nos pontos encontrados no passo anterior:

$$f(1,0) = -7.$$

(iii) Valores extremos de f na fronteira da região fechada e limitada:

A fronteira de da região é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$. Logo usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o máximo e o mínimo de f sobre esse círculo:

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2$, daí

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

Da segunda equação temos

$$3y - \lambda y = 0 \Rightarrow y(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3.$$

Se $y = 0$, pela terceira equação $x = \pm 4$ e daí temos os pontos $(4,0)$ e $(-4,0)$.

Se $\lambda = 3$, pela primeira equação $x = -2$ e daí pela terceira equação $y = \pm 2\sqrt{3}$.

E

$$f(4,0) = 11; \quad f(-4,0) = 43, \quad f(-2, \pm\sqrt{3}) = 47.$$

(iv) Valores máximo e mínimo absolutos:

Pelos itens anteriores segue que $f(-2, \pm\sqrt{3}) = 47$ é máximo absoluto de f na região dada e $f(1,0) = -7$ é mínimo absoluto de f na região dada.