UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 8: Dependência e independência linear

Ementa: Combinações lineares; conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes.
Objetivos: Saber verificar se um dado conjunto de vetores em um espaço vetorial é l.i. ou l.d., bem como compreender qual o significado dessas classificações e como utilizá-las em demonstrações.

Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores de V. Uma **combinação linear** dos vetores dados é qualquer soma da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i. Sempre é possível encontrar uma combinação linear dos vetores dados que satisfaz a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0. \tag{1}$$

Basta tomarmos todos os escalares a_i iguais a zero. Se a única solução da Equação (1) for $a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, dizemos que A é um conjunto **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI. Caso contrário, se existirem soluções para (1). tais que algum $a_i \neq 0$, dizemos que o conjunto A é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

1 Propriedades

- O vetor nulo é LD, pois o produto de qualquer escalar por ele é igual a ele mesmo;
- Se v é um vetor não nulo de um espaço vetorial V, então o conjunto unitário $\{v\}$ é LI, pois $av = 0$, para $a \in \mathbb{R}$ se, e só se $a = 0$;
- Se um subconjunto de um espaço vetorial V contém o vetor nulo, então esse conjunto é LD;

- Se um subconjunto de um espaço vetorial V possui um vetor que é combinação linear dos demais, o conjunto é LD;

- Se B é um subconjunto de um espaço vetorial V tal que $A \subset B$ e A é um conjunto LD, então B também é LD;

- Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é LI e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\} \subset V$ é LD, então w é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2 Exemplos

Exemplo 1 *Mostremos que o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$ é linearmente independente.*

De fato, a equação:

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

só vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, os vetores (1,0) e (0,1) são LI

Exemplo 2 *Os elementos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3,6)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes. Note que,*

$$3v_1 + (-1)v_2 = 3(1,2) - 1(3,6) = (0,0)$$

Exemplo 3 *Sejam os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (4,3)$ de $\mathbb{R}^2$. Mostremos que v_1 e v_2 são linearmente independentes.*

Observe que a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \alpha_1(1,2) + \alpha_2(4,3) = (0,0)$$

é válida se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Exemplo 4 *Seja o subconjunto $\{2x, x^2+1, x+1, x^2-1\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Mostremos que é um subconjunto linearmente dependente.*

De fato, tomando a equação:

$$\alpha_1(2x) + \alpha_2(x^2+1) + \alpha_3(x+1) + \alpha_4(x^2-1) = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x)\alpha_1 + x^2\alpha_2 + \alpha_2 + x\alpha_3 + \alpha_3 + x^2\alpha_4 - \alpha_4 = 0 + 0x + 0x^2$$

Reorganizando, temos que:

$$(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (2\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_4)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Dois polinômios são iguais se os coeficientes correspondentes dos termos de mesmo grau forem iguais, sendo assim temos:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Note que, o sistema acima é um sistema linear homogêneo com apenas três equações e quatro incógnitas, ou seja, pelo menos uma incógnita vai ser dependente. Assim o sistema admite mais de uma solução além da solução trivial.

Daí podemos afirmar que o conjunto é linearmente dependente.

Exemplo 5 *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *pertencentes a* $M_2(\mathbb{R})$. *Mostremos que* A, B, C *e* D *são linearmente independentes.*

Para mostramos que os vetores acima são de fato LI, tomaremos a seguinte equação:

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos que $\alpha_2 = 0$. *Daí, temos que* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 6 *Mostremos que os polinômios* $1, x, x^2, x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ *são linearmente independentes.*

Tomemos a seguinte equação:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Note que, a equação só vale se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 7 *Determine c para que o subconjunto* $\{(3,5c,1),(2,0,4),(1,c,3)\} \in \mathbb{R}^3$ *seja linearmente independente.*

Para encontrarmos c onde conjunto seja linearmente independente, tomemos a equação:

$$\alpha_1(3,5c,1)+\alpha_2(2,0,4)+\alpha_3(1,c,3)=(0,0,0)$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 5c\alpha_1+c\alpha_3=0 \\ \alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=0 \end{cases}$$

Para que o conjunto seja linearmente independente, temos que ter $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, *ou seja, o sistema linear homogêneo acima deve admitir somente a solução trivial (todos os* α_i, $i=1,..,3$ *iguais a zero). Mas para isso, basta que o determinante da matriz do sistema seja diferente de 0. Isto é:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5c & 0 & c \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2c+20c-30c-12c \neq 0 \Rightarrow -20c \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$$

Assim, para $c \neq 0$ *o conjunto* $\{(3,5c,1),(2,0,4),(1,c,3)\}$ *é LI e para* $c=0$ *temos que o conjunto é LD*

Exemplo 8 *O subconjunto* $\{(1,1,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,0),(0,2,-1,4)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *é linearmente dependente.*

De fato, temos que:

$$0(1,1,0,0)+2(0,1,0,2)-1(0,0,1,0)=(0,2,-1,4)$$

Observe que, um dos vetores é combinação linear dos demais, assim o subconjunto é linearmente dependente.

3 Exercícios

(1) Mostre que o subconjunto $\{(1,2,1),(-1,1,2),(0,3,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.

(2) Mostre que o subconjunto $\{(1,2,-1),(2,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente.

(3) Mostre que o subconjunto $\{(4,8,-4),(6,12,-6)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.

(4) Escreva o vetor $\vec{v}=(1,-2,5)$ como combinação linear dos vetores $\vec{v_1}=(1,1,1), \vec{v_2}=(1,2,3)$ *e* $\vec{v_3}=(2,-1,1)$.

(5) Determine o valor de c para que o subconjunto $\{(1,-2,c),(3,1,-2),(2,-1,-5)\}$ de $\mathbb{R}^3$ seja linearmente independente.

Determine se os subconjuntos abaixo são linearmente dependentes ou independentes.

(6) $W = \{(4,-1,2),(-4,10,2)\}$.

(7) $W = \{(-3,0,4),(5,-1,2),(-1,-1,10)\}$.

(8) $W = \{2 - x^2 + 4x^3, 3 + 6x + 2x^2 - x^3, 2 + 10x - 4x^2\}$.

(9) $W = \{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$.

(10) $W = \{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.