UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 4: Sistemas lineares

Ementa: Definição, exemplos de sistemas lineares e classificação quanto a solução; matriz de um sistema; método de Gauss (escalonamento); método da matriz inversa.
Objetivos: Saber utilizar o método de Gauss para determinar a solução de um sistema linear e classificar um sistema linear de acordo com sua solução.

Uma **equação linear** é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são os coeficientes reais. E um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares como o que segue

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Uma solução para o sistema (1) é uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais que satisfaz simultaneamente todas as equações que compõem o sistema.

De acordo com sua solução, um sistema linear pode ser classificado em:

- **Sistema compatível:** se possui solução. Se a solução for única, é dito **compatível determinado**. Se as soluções forem infinitas, é chamado **compatível indeterminado**;
- **Sistema incompatível:** se não admite solução.

Exemplo 1

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Solução: $x = 7$ *e* $y = 3$.

Exemplo 2

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 6 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solução: $x = 5z$, $y = 2 - 4z$ *e* $z = z, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Solução: $\nexists$. *O sistema é incompatível.*

1 Sistemas lineares e matrizes

Dado o sistema (1), podemos escrevê-lo na sua forma matricial da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

isto é, se chamarmos de A a matriz dos coeficientes, de X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes, temos

$$A \cdot X = B.$$

A matriz

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada a **matriz ampliada** do sistema.

1.1 Escalonamento de matrizes

Através de operações elementares em uma matriz é possível reduzí-la a sua forma escalonada. Fazendo isso na matriz ampliada de um sistema linear, obteremos um sistema mais simples, equivalente ao primeiro. Logo encontrar a solução deste sistema mais simples implica em encontrar a solução do sistema inicialmente proposto. Uma matriz está na sua **forma escalonada** se for nula, ou se

- o primeiro elemento não nulo de cada linha é igual a 1;
- a coluna onde ocorre o primeiro elemento não nulo de cada linha tem os outros elementos nulos;

- todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
- se o primeiro elemento não nulo da linha i acontece na coluna j então o primeiro elemento não nulo da linha $i+1$ aparece na coluna $k > j$.

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \square & 0 & \square & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \square & \cdots \\ & & \ddots & & & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}.$$

1.2 Solução de sistemas lineares

O **método de Gauss** é a maneira de resolver um sistema linear trabalhando com sua matriz ampliada. O objetivo é reduzir a matriz ampliada a sua forma escalonada, e então obter a solução do sistema equivalente obtido.

Exemplo 4 *Resolva e classifique o sistema linear abaixo, utilizando o método de Gauss:*

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + 1z = 8 \end{cases}$$

Solução:
Vamos escalonar a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_{1\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_{1\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix} L_2 \Leftrightarrow L_{3\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - L_{2\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -L_{3\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - L_{3\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *O sistema é compatível e determinado, e sua solução é* $S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 5 *Resolva o sistema abaixo e classifique-o.*

$$\begin{cases} x+y+3w=4 \\ 2x+y-z+w=1 \\ 3x-y-z+2w=-3 \\ -x+2y+3z-w=4 \end{cases}$$

Solução:

Vamos utilizar o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 2\cdot L_1{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 3\cdot L_1{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{array}\right] L_4 \to L_4 + L_1{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow -L_2{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - L_2{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + 4\cdot L_2{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{array}\right] L_4 \to L_4 - 3\cdot L_2{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_3 \to \frac{1}{3}\cdot L_3{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - L_3{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + L_3{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_4 \to \frac{-1}{13}L_4{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - \frac{13}{3}L_4{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_4{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - \frac{7}{3}L_4{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Reescrevendo a matriz ampliada como um sistema, teremos que:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ *O sistema é compatível e determinado.* $S = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2 Método da matriz inversa

Para sistemas lineares em que o número de equações coincide com o número de incógnitas, podemos utilizar um outro método para resolvê-los, que chamaremos de **método da matriz inversa**. Considere o sistema

$$AX = B$$

e suponha que A seja uma matriz inversível. Neste caso, existe a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ e daí

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Portanto, se A é inversível, o sistema possui uma única solução dada por

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Exemplo 6 *Dado o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 32 \\ x + y = 16 \\ -y - 2z = 24 \end{cases}$$

Determine a solução do sistema utilizando o método da matriz inversa.

Solução:
Primeiro, vamos escrever o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Para utilizar o método da matriz inversa é necessário calcular a matriz inversa de A*, caso exista, a solução do sistema pode ser dado da seguinte maneira:* $X = A^{-1} \cdot B$*.*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to -L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 + 3 \cdot L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 3 \cdot L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A *é* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$*. Desta forma, a solução será:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 32 - 1 \cdot 16 + 3 \cdot 24 \\ -2 \cdot 32 + 2 \cdot 16 - 3 \cdot 24 \\ 1 \cdot 32 - 1 \cdot 16 + 1 \cdot 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 - 16 + 72 \\ -64 + 32 - 72 \\ 32 - 16 + 24 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *A solução do sistema é* $X = \begin{bmatrix} 120 \\ -104 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Exemplo 7 *Resolva o sistema abaixo, utilizando o método da matriz inversa.*

$$\begin{cases} x + 2w = 10 \\ x - y = 6 \\ -y - 2z + w = 30 \\ y + z = 12 \end{cases}$$

Solução:
Escrevendo o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Abaixo temos a matriz ampliada e as respectivas operações elementares sobre as linhas da mesma, para se obter a matriz inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to -L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to L_4 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \Leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to L_4 + 2 \cdot L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to -L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow_{L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A *é* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Desta forma, a solução será:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 12 \\ -1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 12 \\ 1 \cdot 10 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 30 - 3 \cdot 12 \\ 1 \cdot 10 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 30 - 2 \cdot 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 + 12 + 60 + 48 \\ -10 + 6 + 60 + 48 \\ 10 - 6 - 60 - 36 \\ 10 - 6 - 30 - 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \textit{ A solução do sistema é } X = \begin{bmatrix} 110 \\ 104 \\ -92 \\ -50 \end{bmatrix}.$$

3 Exercícios

(1) Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares utilizando o método de Gauss:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -\frac{14}{3}x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$

(2) Expresse matricialmente os sistemas:

(a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 2x + 3y + 6z = 2 \\ 5x + y - z = 8 \end{cases}$

(3) Resolva os sistemas lineares do exercício anterior utilizando o método da matriz inversa, caso seja possível.

(4) Determine o valor real de a, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - az = 0 \end{cases}$$

(5) Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Determine, os valores reais de a, para que o sistema seja:

(a) compatível e determinado;

(b) compatível e indeterminado;

(c) incompatível.

(6) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, se possível, a inversa de A;

(b) Utilize o método da matriz inversa para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1$ e 2.

(7) Determine o valor real de a, para que o sistema linear dado admita solução compatível e indeterminada.

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{cases}$$

(8) **(FUVEST)** Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

(9) **(UFU - Adaptada)** Resolva o problema a seguir, por meio de sistemas lineares.
Por causa de hábitos alimentares inadequados, um cardiologista nota que os seus pacientes com hipertensão são cada vez mais jovens e fazem uso de medicamentos cada vez mais cedo. Suponha que Pedro, Márcia e João sejam pacientes, com faixas etárias bem distintas e que utilizam um mesmo hipertensivo em comprimidos. Sabe-se que João utiliza comprimidos de 2 mg, Márcia de 4 mg e Pedro de 10 mg. Além disso, mensalmente, Pedro toma o triplo de comprimidos de Márcia e os três consomem 130 comprimidos, totalizando 780 miligramas da droga. Com base nestas informações, quantos comprimidos Márcia ingere mensalmente?

(10) **(UFV)** No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos segmentos pagarei R\$ $31,00$. Determine x, y e z.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.