Resolução P2 - Álgebra I - 18/07/2023

Questão 1:

$$\mathcal{C}(a) = \{x \in A : a \cdot x = x \cdot a\}$$

- Note que $\mathcal{C}(a) \subset A$, por definição
- $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0 \Rightarrow 0 \in \mathcal{C}(a)$
- Sejam $x, y \in \mathcal{C}(a)$, logo $a \cdot x = x \cdot a$ e
  $a \cdot y = y \cdot a$

Daí,

$a(x-y) = ax - ay = xa - ya = (x-y)a$

$\Rightarrow (x-y) \in \mathcal{C}(a).$

e

$a(x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot y = (x \cdot a) \cdot y = x \cdot (ay) = x(ya)$

$= (x \cdot y) \cdot a$

$\Rightarrow (x \cdot y) \in \mathcal{C}(a).$

Portanto, $\mathcal{C}(a)$ é subanel de A.

——— // ———

Questão 2:

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (y,x)$$

• f é homomorfismo. De fato, dados $(x,y), (a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, temos

$$f((x,y)+(a,b)) = f((x+a, y+b))$$
$$= (y+b, x+a) = (y,x) + (b,a)$$
$$= f(x,y) + f(a,b)$$

$$f((x,y)\cdot(a,b)) = f((x \cdot a, yb)) = (yb, x \cdot a)$$
$$= (y,x)\cdot(b,a)$$
$$= f(x,y) \cdot f(a,b)$$

• f é injetora. De fato,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : f(x,y) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : (y,x) = (0,0)\}$$
$$= \{(0,0)\}$$

· f é sobrejetora. De fato, dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, note que $(b,a) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ e

$f(b,a) = (a,b)$, logo $(a,b) \in Im(f)$ e daí que $Im f = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ e portanto, f é sobrejetora.

Então f é um isomorfismo.

Questão 3:

a). $I = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = 0\}$
$= \{(0,y) : y \in \mathbb{Z}\}$

Mostremos que I é ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

↳ $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, por definição.

↳ $(0,0) \in I$, basta tomar $y = 0$.

↳ Sejam $(0,y_1), (0,y_2) \in I$ e $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

· $(0,y_1) - (0,y_2) = (0, y_1 - y_2) \in I$

· $(x,y)(0,y_1) = (x \cdot 0, y \cdot y_1) = (0, y \cdot y_1) \in I$ e

$(0, y_2)(x, y) = (0 \cdot x, y_2 \cdot y) = (0, y_1 \cdot y) \in I.$

Portanto, I é ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

—————— // ——————

b) $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a projeção canônica é um homomorfismo de anéis. De fato, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ temos

$$\pi((a,b)+(c,d)) = \pi((a+c, b+d))$$
$$= a+c = \pi(a,b)+\pi(c,d)$$

$$\pi((a,b)\cdot(c,d)) = \pi(ac, bd)$$
$$= ac = \pi(a,b)\cdot\pi(c,d)$$

Além disso, π é sobrejetora, pois dado qualquer $a \in \mathbb{Z}$, tome $(a, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e daí $\pi(a, 0) = a$.

Logo, pelo Teorema do Homomorfismo

$$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\ker \pi} \simeq \operatorname{Im} \pi = \mathbb{Z}.$$

Vamos determinar $\ker \pi$.

$$\ker\pi = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \pi(x,y) = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x = 0\}$$
$$= \{(0,y) : y \in \mathbb{Z}\} = I$$

Portanto,

$$\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{I} \simeq \mathbb{Z}.$$

Questão 4:

Sejam I, J, P ideais de A tais que P seja ideal primo de A e
$$IJ \subset P.$$

Suponha que $I \not\subset P$, logo existe $x \in I$ tal que $x \notin P$.

Mostremos que, neste caso $J \subset P$. De fato, dado $y \in J$,

$xy \in IJ \subset P$

logo, $xy \in P$ e como P é primo $x \in P$ ou $y \in P$. Como $x \notin P$, segue que $y \in P$.

Como tomamos y qualquer em J segue que $J \subset P$.

Analogamente, mostra-se que se $J \not\subset P$ então $I \subset P$.

Questão 5:

a) F

Observe que, em $\mathbb{Z}_3[x]$, temos

$$(x^2+\bar{2}x+\bar{2})(x^2+\bar{1}) = x^4+x^2+\bar{2}x^3+\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{2}$$
$$= x^4+\bar{2}x^3+\bar{2}x+\bar{2}$$

Portanto, $x^4+\bar{2}x^3+\bar{2}x+\bar{2}$ é redutível.

---

b) V

$$(\bar{4}x^2+\bar{2}x+\bar{4}).\bar{4} = \overline{16}x^2+\bar{8}x+\overline{16} = \bar{0}$$

---

e) F

Tome $D = \mathbb{R}$, o polinômio

$$(x^4 + 2x^2 + 1) = (x^2+1)(x^2+1)$$

é redutível em $\mathbb{R}[x]$, mas não possui raiz em $\mathbb{R}$.

——— // ———

d) F

$\dfrac{\mathbb{Z}_3[x]}{J}$ é corpo $\Leftrightarrow$ J é ideal maximal

$J = \mathbb{Z}_3[x] \cdot p(x)$ é maximal $\Leftrightarrow$ $p(x)$ é irredutível.

Vejamos se $p(x) = x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3$. Como é um polinômio de grau 2, basta verificar se $p(x)$ possui raiz em $\mathbb{Z}_3$.

$p(\bar{0}) = \bar{1}$; $p(\bar{1}) = \bar{1}$; $p(\bar{2}) = \bar{4} + \bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$

Logo,

$$x^2 + \bar{2}x + \bar{1} = (x - \bar{2})(x - \bar{2})$$
$$= (x + \bar{1})(x + \bar{1})$$

e daí que $p(x)$ é redutível. Então J não é maximal e portanto a afirmação é falsa.

——— // ———

e) V

Pelo critério de Eisenstein considerando o primo 2 segue que x^3+2x^2+10 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

——— // ———