UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 11: Transformações lineares - Parte II

Ementa: Matriz de uma transformação linear; operações com transformações lineares; operadores lineares.
Objetivos: Determinar a matriz de uma transformação linear e utilizá-la na resolução de problemas envolvendo transformações lineares.

1 Transformações lineares e matrizes

Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita e fixarmos bases para estes espaços, então uma transformação linear $T : U \to V$ pode ser representada por uma matriz. Vejamos como determinar tal matriz.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões n e m respectivamente e $T : U \to V$ uma transformação linear. Fixemos $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V. Como β é base de V, para cada $u_j \in \alpha$ podemos determinar a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ tais que

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m.$$

Assim, para $u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$, teríamos

$$T(u) = k_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{m1}v_m) + \ldots + k_n(a_{1n}v_1 + \ldots + a_{mn}v_m).$$

E daí as coordenadas de $T(u)$ na base β seriam dadas por

$$[T(u)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [T]^\alpha_\beta \cdot [u]_\alpha,$$

onde a matriz

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}k_n \end{pmatrix}$$

representa T em relação às bases α e β, e é chamada **matriz de T nas bases** α e β.

Exemplo 1 *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (2x - y, x)$. Determine a matriz da transformação, considerando a base canônica.*
Solução: *A base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\{e_1, e_2\}$, onde $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Aplicando a transformação em e_1 e e_2, temos:*

$$T(1,0) = (2,1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$T(0,1) = (-1,0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

A matriz da transformação, $[T]$, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base canônica

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y) = (2x - y, x - 2y, x + 2y)$. Determine a matriz da transformação $[T]^\alpha_\beta$, com $\alpha = \{(1,0),(1,1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$.*
Solução: *Aplicando a transformação na base do domínio, teremos que:*

$$T(1,0) = (2,1,1)$$

$$T(1,1) = (1,-1,3)$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base α, pela transformação linear T, como combinação linear dos elementos da base β:

$$(2,1,1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(0,0,1) = (a_{11}, a_{21}, a_{21} + a_{31})$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 1 - a_{21} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 1 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 0 \end{array}\right.$$

Assim, o vetor na base β, será $[(2,1,1)]_\beta = (2,1,0)$.

$$(1,-1,3) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,1) + a_{32}(0,0,1) = (a_{12}, a_{22}, a_{22} + a_{32})$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -1 \\ a_{22} + a_{32} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -1 \\ a_{32} = 3 - a_{22} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -1 \\ a_{32} = 3 - (-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12} = 1 \\ a_{22} = -1 \\ a_{32} = 4 \end{array}\right.$$

Assim, o vetor na base β, será $[(1,-1,3)]_\beta = (1,-1,4)$. Desta forma, a matriz da transformação é

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 *Sabendo que a matriz de uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *nas bases* $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$ *e* $\beta = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *é*

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre a expressão $T(x,y)$.

Solução: *Pela definição da matriz de uma transformação linear, sabemos que:*

$$T(1,0) = 2 \cdot (1,0,1) - 1 \cdot (0,1,1) + 0 \cdot (1,1,0) = (2,-1,1)$$

$$T(0,1) = 1 \cdot (1,0,1) + 1 \cdot (0,1,1) + 0 \cdot (1,1,0) = (1,1,2)$$

Contudo, todo elemento do $\mathbb{R}^2$ *poderá ser escrito de modo único, como:*

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Aplicando a transformação, teremos:

$$T(x,y) = x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) \Leftrightarrow T(x,y) = x(2,-1,1) + y(1,1,2) = (2x+y, -x+y, x+2y)$$

$\therefore T(x,y) = (2x+y, -x+y, x+2y)$

Exemplo 4 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *uma transformação linear com matriz:*

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Determine a aplicação $T(x,y)$*, tal que* α *seja a base canônica de* $\mathbb{R}^3$ *e* β *a base canônica do* $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Como as bases são as canônicas, pela definição da matriz de uma transformação linear, temos:

$$T(1,0,0) = (1,-4)$$

$$T(0,1,0) = (2,2)$$

$$T(0,0,1) = (-3,-5)$$

Assim

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = x \cdot (1,-4) + y \cdot (2,2) + z \cdot (-3,-5) = (x+2y-3z, -4x+2y+5z)$$

$\therefore T(x,y,z) = (x+2y-3z, -4x+2y+5z)$

2 Operações com transformações lineares

Sejam $T : U \to V$ e $S : U \to V$ transformações lineares. A **soma** de T e S é uma nova transformação linear definida, para todo $u \in U$, por

$$(T + S)(u) = T(u) + S(u).$$

E dado $k \in \mathbb{R}$, o **produto** de k por T é a transformação linear definida, para todo $u \in U$, por

$$(kT)(u) = kT(u).$$

Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita, α é base de U e β é base de V então

$$[T + S]^{\alpha}_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} + [S]^{\alpha}_{\beta} \quad \text{e}$$

$$[kT]^{\alpha}_{\beta} = k[T]^{\alpha}_{\beta},$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5 *Sejam as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_1(x, y) = (x - y, 2x + y, -2x)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_2(x, y) = (2x - y, x - 3y, y)$. Determine as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$:*

1. $T_a = T_1 - T_2$;
2. $T_b = 3T_1 - 2T_2$.

Solução:
É importante notar que tanto T_1, como T_2, são transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, logo:

1. $T_a(x, y) = (x - y, 2x + y, -2x) - (2x - y, x - 3y, y) = (-x, x + 4y, -2x - y)$
2.

$$\begin{aligned} T_b(x, y) &= 3(x - y, 2x + y, -2x) - 2(2x - y, x - 3y, y) \\ &= (3x - 3y, 6x + 3y, -6x) - (4x - 2y, 2x - 6y, 2y) \\ &= (-x - y, 4x + 9y, -6x - 2y) \end{aligned}$$

Exemplo 6 *Sabendo que $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são transformações lineares e que suas matrizes em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ são:*

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $[T_1 + 2 \cdot T_2]$.
Solução:

$$[T_1 + T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3 Operadores lineares

Quando a transformação linear é de um espaço V nele mesmo a chamamos de **operador linear**.

Exemplo 7 *Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x + 2y, 2x + 5y)$, é uma transformação linear e consequentemente um operador linear.*
Solução: *Para a transfromação ser linear, ela deve satisfazer duas condições, na qual verificamos abaixo. Dado, $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:*

(i) $T(u_1 + u_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3x_1 + 3x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 + 5y_1 + 5y_2) = (3x_1 + 2y_1, 2x_1 + 5y_1) + (3x_2 + 2y_2, 2x_2 + 5y_2) = T(u_1) + T(u_2)$

(ii) $T(au_1) = T(a(x_1, y_1)) = T(ax_1, ay_1) = (3ax_1 + 2ay_1, 2ax_1 + 5ay_1) = a(3x_1 + 2y_1, 2x_1 + 5y_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, logo um operador linear em $\mathbb{R}^2$. Além disso, essa transformação se classifica como um operador linear simétrico, ou seja, $([T]_\beta)^t = [T]_\beta$.*

Dado um espaço vetorial V de dimensão finita e escolhidas duas bases de V, digamos α e β, temos uma relação entre as matrizes que dão as coordenadas de um vetor $v \in V$ nessas duas bases. Basta utilizarmos o operador linear identidade $I_V : V \to V$ dado por $I_V(v) = v$. Assim, temos

$$[v]_\beta = [I_V]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha,$$

onde chamamos a matriz $[I_V]_\beta^\alpha$ de **matriz mudança de base** de α para β.

Exemplo 8 *Considere as bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 2, -1), (1, -2, 0), (1, 1, -1)\}$. Assim, determine:*

1. *A matriz mudança de base de β para α, $[M]_\alpha^\beta$;*

2. *As coordenadas de v com relação a base α, tal que o elemento $v = (6, 2, -7) \in \mathbb{R}^3$ tem a seguinte matriz de coordenadas com relação a base β:*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Solução:

1. *Escrevendo os elementos da base β como combinação linear dos elementos da base α:*

$$(1, 2, -1) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$(1, -2, 0) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, , 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$(1,1,-1) = a_{13}(1,0,0) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

Logo, a matriz mudança de base de β para α, será:

$$[M]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. *Pela definição, temos que:*

$$[v]_\alpha = [M]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta$$

Logo

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 Exercícios

(1) Determine a matriz da transformação de cada uma das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T(x,y,z) = (2x-y, 0, y+z)$, considerando a base canônica do $\mathbb{R}^3$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$, com $\alpha = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(-1,1),(0,1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$.

(2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 3z)$ e considere as bases $\alpha = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Determine:

(a) $[T]_\beta^\alpha$;

(b) $[T]_\alpha^\beta$.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $\alpha = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $\beta = \{(-1,0),(0,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Encontre a expressão de $T(x,y,z)$.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,0,-1)$ e $T(0,1,1) = (0,0,1)$.

(a) Determine $T(x,y,z)$;

(b) Determine a matriz de transformação com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule $T(x,y)$.

(6) Sejam S e T operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x,y) = (x-2y, y)$ e $T(x,y) = (2x, -y)$. Determinar:

(a) $S + T$;

(b) $T - S$;

(c) $2S + 4T$.

(7) Sabendo que S,T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e que suas matrizes de transformação linear em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ sejam:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $[S - 5 \cdot T]$.

(8) Considere as bases $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ para $\mathbb{R}^2$. Encontre a matriz mudança de base de β para α.

(9) Considere a matriz de mudança da base β para α de $\mathbb{R}^3$.

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Se o elemento $v \in \mathbb{R}^3$ tem matriz de coordenadas com relação a base β dada por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de coordenadas de v com relação a base α.

(10) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(x,y,z) = (x-y, x+2y-z, y-z)$. Determine $[T]_\beta^\alpha$, sendo $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.