Igor Vallis Christ

A importância dos problemas em matemática: um exemplo na teoria das partições de inteiros

Alegre - ES

Março de 2021

Igor Vallis Christ

A importância dos problemas em matemática: um exemplo na teoria das partições de inteiros

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins

Alegre - ES

Março de 2021

Igor Vallis Christ

A importância dos problemas em matemática: um exemplo na teoria das partições de inteiros

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Trabalho aprovado. Alegre - ES, 08 de março de 2021:

Victor do Nascimento Martins

Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins (Orientador)
(DMPA/CCENS - UFES)

Patrícia Elaine Desideri

Profª. Dra. Patrícia Elaine Desideri
(DMPA/CCENS - UFES)

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza
(FGA - UnB)

Alegre - ES
Março de 2021

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Victor Martins, pelo seu acompanhamento e orientação.

Agradeço aos professores Dra. Patrícia Elaine Desideri e Dr. Matheus Bernardini de Souza presentes na banca avaliadora por aceitarem fazer parte desta e pelas contribuições no desenvolvimento do presente trabalho.

A todos aqueles que foram meus professores, no ensino básico e hoje na universidade, pois contribuiram para eu estar bem próximo de também me tornar um.

A todos meus familiares que mesmo distantes se fizeram presentes nesta etapa de minha vida, especialmente os meus pais, Eliete e Nivaldir.

A minha namorada Flavia e a todos os amigos que construí durante minha graduação, especialmente a Robert Vinicius.

Resumo

O presente trabalho tem por intuito fazer uma investigação sobre a importância dos problemas na matemática. De início, trataremos sobre como a metodologia de George Polya para resolução de problemas voltada para a sala de aula do ensino básico, desenvolvida em sua obra "A arte de resolver problemas" está presente no processo de pesquisa em matemática. Posteriormente, buscando evidenciar o quanto os problemas contribuem para o desenvolvimento da matemática, faremos uma discussão sobre o assunto, bem como, através de exemplos de problemas clássicos exemplificaremos este papel. Por fim, daremos um foco principal para as contribuições dos problemas para a evolução da teoria das partições de inteiros.

Palavras-chave: Problemas matemáticos. Desenvolvimento da matemática. Partições de inteiros.

Sumário

Introdução 6

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA 8
1.1 A resolução de problemas segundo Polya 8
1.2 A resolução por trás de alguns problemas matemáticos 10

2 PROBLEMAS COMO IMPULSIONADORES DA MATEMÁTICA . 15
2.1 Os 3 problemas clássicos da Grécia 15
2.2 Os problemas de Hilbert 20
2.3 Os 7 problemas do milênio 22

3 PARTIÇÕES DE INTEIROS 24
3.1 Introdução 24
3.2 A busca por uma fórmula para $p(n)$ 27
3.2.1 Um limite superior para $p(n)$ 27
3.2.2 Evolução da fórmula $p(n)$ 29
3.3 Identidades em partições 33
3.3.1 As identidades de Rogers-Ramanujan 36
3.3.2 A identidade de Schur 39
3.3.3 Teoremas dos números poligonais 41
3.4 Representações matriciais para partições 46
3.4.1 Representações matriciais para $p(n)$ 47
3.4.2 Representações matriciais para as identidades de Rogers-Ramanujan 48

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 52

REFERÊNCIAS 54

Introdução

Em (CARDOSO, 2006), a palavra problema aparece em um contexto matemático com três principais significados. Primeiro é feita uma abordagem dos problemas da matemática enquanto suas dificuldades intrínsecas. Depois o autor trata da importância dos problemas na matemática enquanto recurso didático para o ensino da disciplina. Por fim, os problemas como aliados ao desenvolvimento da matemática enquanto ciência. Inspirados nesta leitura propomos o presente trabalho, no qual temos como principal objetivo levantar uma discussão sobre a importância dos problemas no desenvolvimento científico da matemática, em especial nas partições de inteiros.

Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. Resolver problemas é algo natural no universo matemático e tema de inúmeras pesquisas e trabalhos, em especial a famosa obra *"A arte de resolver problemas"* de George Polya. Desta forma, no Capítulo 1 deste trabalho, trataremos sobre a relação da metodologia desenvolvida em (POLYA, 2006) para a resolução de problemas na educação básica e a forma com a qual podemos identificar esta metodologia no trabalho científico de matemáticos. Exemplificaremos isto na solução do problema das sete pontes e posteriormente em uma ideia e discussão sobre a solução conhecida até o momento do Problema de Frobenius.

Interessados pela discussão sobre a forma com a qual os problemas matemáticos podem contribuir para aumentar os horizontes da matemática é que apresentaremos no Capítulo 2 alguns problemas clássicos que impulsionaram a matemática enquanto teoria, abordando o cenário de uma matemática atual e não atual, discutindo a forma com a qual os problemas apresentados contribuíram para o desenvolvimento de teorias em matemática, bem como no surgimento de novos problemas.

Finalizaremos nosso trabalho evidenciando a importância dos problemas dentro de uma teoria específica, a teoria das partições de inteiros. É fato que esta área, assim como as demais áreas matemáticas, deve muito de seus avanços, principalmente pela discussão de problemas. Um dos problemas que mais contribuiu para o avanço da teorias das partições consistia na busca por uma fórmula para se estudar o número de partições de n. Os conceitos básicos da teoria são relativamente simples e até entender esse problema da busca por fórmula é simples. Para cada inteiro positivo n, $p(n)$ é o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes, na qual a ordem dessas partes não importa. Cada uma dessas somas é chamada de **partição** de n. A discussão sobre a busca de uma fórmula capaz de contar $p(n)$ fez com que muitos matemáticos se sentissem atraídos para esta área e por conta disso, novas conjecturas tão quanto soluções para problemas da teoria foram se concretizando. Por conta do desenvolvimento da teoria das partições de inteiros ter-se dado principalmente via conjecturas, bem como a busca por respostas a estas conjecturas, que proporemos no Capítulo 3 deste trabalho uma discussão sobre os problemas como impulsionadores da teoria das partições de inteiros, tratando principalmente sobre a busca e evolução da fórmula para $p(n)$ e sobre os problemas em forma de identidades que são bem comuns na teoria. Além disso, trataremos também sobre os principais métodos pelos quais se deram as soluções destes problemas, bem como discutiremos sobre o fato de que novos métodos estão surgindo atualmente e com isso proporcionando novas abordagens de problemas e novas perspectivas para a teoria. Assim, além do objetivo de ilustrar toda a nossa discussão sobre problemas em matemática, este último capítulo servirá de um material introdutório para aqueles que se interessarem em aprofundar os estudos em teoria de partições de inteiros.

Por meio da elaboração deste trabalho buscamos principalmente por uma discusão ao redor da pergunta: qual a importância dos problemas no desenvolvimento científico da matemática? E aproveitaremos dessa questão para introduzirmos a teoria das partições através de problemas importantes na teoria. Outro objetivo que queremos alcançar com a execução deste trabalho é o de gerar um material que sirva como base para discussões atreladas a temática da importância dos problemas para a matemática.

1 Resolução de problemas em matemática

George Polya, em seu livro *"A arte de resolver problemas"*, reservou algumas páginas para desenvolver seu pensamento sobre um método para a resolução de problemas matemáticos. Além disso, deu ideias sobre a forma na qual o professor poderia auxiliar seus alunos neste momento e tirar proveito disto. Neste capítulo, trataremos em um primeiro momento sobre a metodologia de Polya para a resolução de problemas, trazendo informações sobre o seu método e fazendo relação com a forma com a qual um pesquisador em matemática age na realização de seu trabalho, uma vez que o processo pelo qual Polya discorre em seu livro é voltado para o ensino básico, porém, baseado na realidade da resolução de problemas por pesquisadores. Em um segundo momento, faremos exemplificações do processo de resolução de um problema seguindo a metodologia de Polya a fim de trazermos significado ao leitor sobre tal metodologia.

1.1 A resolução de problemas segundo Polya

George Polya (1887-1985) foi um matemático húngaro que durante toda a sua carreira teve publicações importantes para a matemática pura, uma vez que costumava trabalhar em parceria com matemáticos de renome, como por exemplo, Hilbert, Hardy e Littlewood. Paralelamente a seus trabalhos na matemática pura, Polya deixou sua contribuição notável para a heurística em educação matemática e dentre suas contribuições, no ano de 1945, publicou o livro *"A arte de resolver problemas"*. Nesta seção exibiremos os quatro passos para a resolução de um problema matemático segundo a metodologia de Polya, bem como, faremos uma breve explicação de como proceder em cada um destes passos. Atentamos novamente o leitor, que estamos propondo tal metodologia voltada para o ambiente de pesquisa em matemática, enquanto que na publicação original de Polya, sua metodologia é voltada para a sala de aula do ensino básico. Caso o leitor se interesse por mais informações sobre a metodologia de Polya voltada para a solução de problemas no ensino básico sugerimos (POLYA, 2006).

A compreensão do problema

Não é uma atitude sábia partir para a execução de uma tarefa sem antes tomarmos conhecimento daquilo que devemos fazer, tampouco onde queremos chegar. Para que a resolução de um problema seja alcançada torna-se extremamente importante a interpretação daquilo a que estamos nos propondo a resolver. Para isso é indispensável que estejamos atentos as informações propostas no problema em questão. A primeira coisa a ser feita deve ser o entendimento do enunciado do problema.

Nesta fase, o pesquisador questiona-se sobre o que se trata e o que ele deve fazer para que o problema seja solucionado. Procura-se por interpretar o que se pede, juntar o montante de informações que lhe são dadas no enunciado e buscar relações entre elas. É o momento no qual o pesquisador procura por juntar as informações que lhe são dadas e as ferramentas que ele possui.

Caso o problema seja algo que possa ser enaltecido por uma experiência visual, este então pode recorrer ao uso de softwares gráficos, pode realizar testes com o uso do computador como forma de ter a noção de como aquele problema tende a se comportar mediante aproximações de valores, etc. Por fim, perguntar-se a si mesmo, sem que se tenha uma resposta definitiva, mas sim provisória, se já é possível resolver o problema.

Estabelecimento de um plano

Para confeccionarmos um plano é fundamental que tenhamos alguma noção do que será necessário para que cheguemos a solução do problema. O foco principal desta etapa da resolução é buscarmos por uma ideia, sendo que esta pode vir à tona gradualmente ou após tentativas frustadas de solução.

É notório que boas ideias não surgem frequentemente "do nada". Geralmente, para que se chegue a ideia da solução é necessário que o pesquisador possua um certo repertório matemático na área do problema, assim, experiências passadas devem sempre ser levadas em consideração a cada novo problema que nos propusermos a resolver. Problemas semelhantes, resultados sobre a temática do problema, trabalhos realizados na área devem ser levados em consideração.

Uma observação a ser feita a respeito da formulação de nosso plano é observamos se nele utilizamos todas as informações que nos foram dadas no problema proposto. Geralmente, todos os dados que estão no enunciado do problema precisam ser usados em sua resolução.

Execução do plano

Após a criação do plano, o próximo passo para a solução é realizarmos todo aquele roteiro que ficou preparado em nossa confecção. Nesta parte é bom que avaliemos tudo aquilo que está sendo feito, e procurando sempre manter claro cada passo dado em nosso roteiro, a fim de minimizar a chance de termos um erro e comprometermos a solução.

Retrospecto

A última fase da resolução de um problema na visão de Polya, é o retrospecto, fase dedicada a se tirar proveito da solução do problema. Com o problema revisado e a garantia da solução estar correta, podemos então trazer aplicabilidade para este em outros problemas matemáticos ou em problemas do nosso cotidiano. Além disso, podemos também, fazer questionamentos sobre a possibilidade de resolver o problema de alguma outra maneira ou sobre um aperfeiçoamento na solução deste.

Da solução de um problema podem surgir uma infinidade de novos problemas que derivam ou que dependiam da solução deste. Desta forma, a partir de alterações na formulação deste, ou em sua aplicabilidade, a resolução de um problema matemático sempre tem muito a contribuir para a matemática pura em si, ou na sua aplicabilidade do cotidiano.

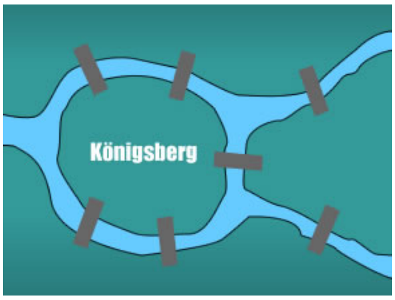
1.2 A resolução por trás de alguns problemas matemáticos

Conhecido o método de Polya para a resolução de problemas, vamos agora ver na prática como este funciona. Nesta seção, conheceremos dois problemas famosos da matemática e através deles exemplificaremos a funcionalidade da metodologia de Polya, evidenciando que sua metodologia para a resolução de problemas nas salas de aula do ensino básico é baseada na resolução de problemas por pesquisadores matemáticos. De início, conheceremos o Problema das Sete Pontes, bem como a sua resolução proposta por Euler no séc. XVIII; posteriormente, conheceremos o Problema de Frobenius e o que se conhece da solução deste até o momento, além dos avanços que temos para o restante do problema que permanece em aberto. Para mais informações sobre o Problema das Sete Pontes e o Problema de Frobenius indicamos, respectivamente, (CIÊNCIA, 2011) e (IGNÁCIO, 2019).

O Problema das Sete Pontes

No século XVIII, na cidade de Königsberg, atual Kaliningrado, um enigma ficou muito famoso; tratava-se do problema das sete pontes. Nesta cidade, havia seis pontes, que interligavam duas ilhas às margens do rio Pregel e uma outra que fazia a ligação entre as duas ilhas, como mostra a figura abaixo:

Figura 1 – As sete pontes de Königsberg

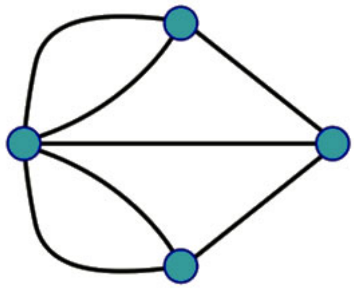


Fonte: (CIÊNCIA, 2011).

A partir deste cenário, por volta do ano de 1735, os próprios moradores da cidade propuseram a seguinte questão: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida? Deste problema, veio a solução, proposta por Euler, de que seria impossível fazer este passeio e mais que isso, o surgimento da teoria dos grafos.

Para a resolução deste enigma, Euler descartou tudo o que era irrelevante para o problema, como os detalhes geométricos, a exemplo, o comprimento das pontes, suas formas, o tamanho da ilha... e assim propôs o seguinte diagrama:

Figura 2 – Grafo do problema



Fonte: (CIÊNCIA, 2011).

Note que o que Euler fez é justamente o que Polya nos traz como o primeiro passo de seu método, a fase da compreensão do problema. Euler cria, como forma de visualizar melhor do que se tratava o problema no qual estava se colocando a resolver, uma representação visual do problema, abrindo mão de todas as informações que se mostravam insignificantes para a resolução deste. Note que no diagrama proposto por Euler, que mais tarde veio a ser chamado de grafo, temos quatro pontos, em que dois representam as duas margens, enquanto que os outros dois representam as duas ilhas. Além disso, temos sete linhas que interligam os quatro pontos do grafo, representando as sete pontes.

Baseado em seu diagrama, Euler propõe então aquele que vem a ser o seu plano. Ele transformou o problema das pontes em um problema que consistia em fazer um passeio pelo grafo a partir de um dos quatro pontos, percorrendo cada uma das sete linhas uma única vez, voltando ao ponto de partida. Desta forma, foi aproveitado tudo o que convinha das informações que se tinha sobre o problema e assim Euler propôs então o passeio pelo diagrama, que veio a ser a sua ideia para a solução, o segundo passo da metodologia de Polya.

Definida a ideia para a resolução do problema, partimos agora então para a terceira etapa do método de Polya, a execução do plano. Observe que ao atravessar cada ponto (vértice), são gastos exatamente duas linhas (arestas), uma para entrar e outra para sair. Assim, para que o problema tivesse solução, precisaríamos que cada vértice tivesse número par de linhas incidindo nele. Porém, como o grafo do nosso problema possui número ímpar de linhas incidentes em todos os vértices, este não pode ter solução.

Como último ponto da metodologia de Polya temos então o retrospecto, a fase dedicada a revisão do problema e o aperfeiçoamento da solução, além de ser momento de reflexão sobre a aplicabilidade deste problema em nosso cotidiano ou na própria matemática. Resumidamente, é o momento dedicado a tirarmos proveito da resolução do problema. Da resposta do enigma, muito aproveitou-se do raciocínio empregado por Euler, formalizando-se no século XIX a Teoria dos Grafos. A resposta do enigma em si não possui tanta relevância, já o raciocício para a resolução deste mostra-se muito importante para a matemática. A aplicabilidade dos grafos nos traz solução a problemas que possuem relevância para a realidade em que vivemos. São exemplo desta aplicabilidade, a utilização deste conceito por carteiros bem como aqueles que cuidam da coleta de lixo das cidades, uma vez que estes buscam por trajetos de sua origem até o seu retorno ao mesmo local, repetindo o mínimo de ruas possíveis a fim de maximizar a qualidade de seus serviços. Outro serviço que traz o uso do conceito de grafo é a internet, em que podemos relacionar os computadores com os vértices e as linhas que os conectam os links de fibra ótica.

O Problema de Frobenius

Imagine uma situação hipotética, na qual você se dirige a um caixa eletrônico com a intenção de realizar o saque de determinada quantia de dinheiro. Chegando lá você observa que apesar do caixa possuir uma quantidade infinita de cédulas (suponha que isso seja possível), estas são apenas de valores de 2 e 5 reais. Uma pergunta natural a ser levantada é a respeito das quantias que são possíveis de serem sacadas, contando apenas com esses dois valores de cédulas. Em nosso caso, apenas dois valores não podem ser sacados deste caixa, os valores 1 e 3 reais.

Nesta perspectiva, surge no final do século XIX o chamado "Problema de Frobenius", proposto pelo matemático alemão de mesmo nome que tem por enunciado: dados inteiros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ coprimos, encontrar o maior inteiro que não é possível de se representar através da combinação linear de $a_1, a_2, \cdots, a_n$ com coeficientes inteiros não-negativos. O maior inteiro a ser descoberto pelo problema de Frobenius é chamado número de Frobenius, denotado $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (abreviado para f no texto quando conveniente).

No primeiro passo para a resolução deste problema, seguindo a metodologia de Polya, devemos ficar atentos ao seu enunciado para a partir dele tirarmos informações importantes para a compreensão do que se pede e então gerarmos um plano. Como os inteiros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são coprimos, então $\text{mdc}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$. Outra informação obtida com o auxílio do enunciado é o fato de que estamos buscando pelo menor inteiro positivo f tal que para todo inteiro positivo $d > f$ a seguinte equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \tag{1.1}$$

possui solução não-negativa, com $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Observados todos esses fatos, vemos que o problema pode ser representado por uma equação diofantina e assim podemos utilizar ferramentas desta natureza para a solução deste.

Passando agora para o segundo passo da nossa solução, vamos então propor um plano. Em nosso caso, devemos primeiro mostrar que de fato existe a cota f que satisfaz as condições do problema e depois então buscaremos por mostrar que cota é esta para valores de $i = 1, 2, \cdots, n$.

Com o plano arquitetado, partimos então para o terceiro passo da resolução, a execução do plano. Como dito acima, começaremos por mostrar que de fato existe uma cota superior que satisfaça as condições do problema. Neste trabalho não temos a intenção de demonstrar como de fato é a resolução deste problema, buscamos apenas por mostrar o passo a passo a ser tomado seguindo a metodologia de Polya. Caso o leitor se interesse pelas demonstrações dos resultados que enunciaremos abaixo, bem como por exemplos que contribuem para o entendimento destes, indicamos (IGNÁCIO, 2019). Sendo assim, para mostrarmos a existência da cota dita anteriormente, basta que demonstremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Se $mdc(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, então existe um inteiro N tal que todo inteiro $s \geq N$ pode ser escrito da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, com x_i não-negativo para todo $i = 1, \cdots, n$.*

Mostrada a existência de uma cota superior que satisfaz as condições do problema seguimos com nosso plano: devemos agora mostrar qual é o número de Frobenius, $f(a_1, a_2)$, no caso em que tem-se dois números naturais a_1, a_2 coprimos. O resultado a ser demonstrado pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1.2. *Sejam a_1, a_2 inteiros coprimos maiores que 1. Então,*

$$f(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1 - a_2.$$

Apresentada a cota para o caso em que $n = 2$, o natural agora é trabalhar no caso em que $n = 3$. Até o momento não temos um número fechado para $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ como ocorre no caso de $n = 2$. Existe apenas uma estimativa para o número de Frobenius. Abaixo segue uma proposição que nos diz que para o caso de $n = 3$ temos uma solução para o Problema de Frobenius.

Proposição 1.1. *Sejam a, b, c inteiros não negativos tais que $mdc(a, b, c) = 1$. Se $d \geq c(mdc(a, b) - 1) + mmc(a, b) - a - b + 1$, então a equação $ax + by + cz = d$ tem solução.*

Em particular, a proposição acima garante que

$$f(a_1, a_2, a_3) \leq min \left\{a_k(mdc(a_i, a_j) - 1) + mmc(a_i, a_j) - a_i - a_j\right\},$$

com $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$.

Já foi dito anteriormente que, até o presente momento, não temos nenhum número fechado para $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ quando $n \geq 3$. Partindo então agora para um retrospecto da resolução possível até o momento, muitas coisas podem ser aperfeiçoadas, por exemplo, pela forma na qual a demonstração de (1.1) é feita, conseguimos uma cota superior para f e é possível encontrarmos ainda outras melhores que esta. No caso de $n = 3$ é possível inferirmos cotas superiores para $f(a_1, a_2, a_3)$ bastante satisfatórias, além disso, temos também, vários algoritmos de tempo polinomial para o cálculo de $f(a_1, a_2, a_3)$.

Melhorar resultados é algo comum na matemática e extremamente importante na visão de muitos pesquisadores matemáticos, como Polya, que defende este ponto de vista na quarta etapa do seu método de resolução de problemas. A partir da tentativa de se aprimorar algum resultado, novos conceitos são utilizados no mesmo problema, desta forma, tornando-se por vezes possível a aproximação de duas áreas distintas como veremos frequentemente no decorrer do trabalho. Em problemas que permanecem em aberto, a busca pela melhora da solução do que se possui resolvido, como é o nosso caso neste problema, pode gerar novas ideias que podem vir a contribuir para a solução da parte que permanece sem resposta. Abaixo listamos algumas das cotas superiores do problema em questão, bem como o ano em que cada uma foi feita, desta forma é possível termos uma noção do quanto o processo para solução de um problema pode ser demorado, bem como muitos matemáticos se dedicam ao aprimoramento de resultados com o passar do tempo.

- Schur (1935): $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq (a_1 - 1)(a_n - 1) - 1$;
- Erdös e Grahan (1972): $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq 2a_{n-1} \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor - a_n$;
- Lewin (1972): $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq \left\lfloor \frac{(a_n-2)^2}{2} \right\rfloor - 1$;
- Selmer (1977): $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq 2a_n \left\lfloor \frac{a_1}{n} \right\rfloor - a_1$.

2 Problemas como impulsionadores da matemática

Os problemas em um contexto geral de ciência têm um papel importantíssimo para o desenvolvimento das mais variadas teorias, além disso, por muitas vezes são estes que regem a forma com a qual a ciência se desenvolve, visto a necessidade de respostas para muitas perguntas que temos em aberto e que cuja solução podem resultar em avanços para a vida humana. Na matemática em específico, isso não poderia ser diferente. David Hilbert (1832-1943), matemático alemão, no ano de 1900 já tratava sobre este assunto e em uma publicação, propôs em uma conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris uma lista com problemas em aberto os quais ele acreditava que a solução ou até mesmo a discussão sobre estes poderiam trazer muitos avanços para a matemática. Na visão de Hilbert,

> "É inegável a grande importância de determinados problemas para o progresso da ciência matemática em geral e o importante papel que estes representam para o trabalho individual de pesquisadores. Enquanto um ramo da ciência apresentar problemas, ele é vital, pois a falta de problemas significa morrer ou deixar de desenvolver-se por si só. Assim como todo o empreendimento humano segue metas, a pesquisa matemática também precisa de problemas. Através da resolução de problemas irradia-se a força do pesquisador. Ele encontra novos métodos e perspectivas; ele ganha um horizonte mais amplo e livre" (HILBERT, 2020, p. 1).

Da resolução de um problema em matemática, muitos proveitos podem ser obtidos, desde a aplicabilidade de determinado conceito em determinada área, uma nova teoria que se inicia e, principalmente, um novo leque de problemas que surgem a partir da resolução daquele. Desta forma, apresentaremos agora alguns dos problemas matemáticos que contribuíram para o avanço do horizonte da matemática.

2.1 Os 3 problemas clássicos da Grécia

> " Os gregos foram responsáveis pelo acelerado desenvolvimento da Matemática no mundo antigo tendo as construções geométricas como principal método de resolver problemas através da ideia de representar uma grandeza qualquer na forma de um segmento de reta" (D'ACAMPORA, 2014, p.11 apud (GERVÁZIO, 2015, p. 5)).

Três problemas tiveram destaque na matemática grega e estes foram: o problema da duplicação do cubo, o problema da quadratura do círculo e o problema da trissecção do ângulo.

Apesar de no enununciado dos três problemas aparecer o pedido de que se realize a construção usando apenas régua e compasso, enganam-se aqueles que acreditam que os gregos utilizavam apenas régua e compasso para a solução de seus problemas. Como nos dias atuais, matemáticos utilizam todas as ferramentas possíveis e existentes para a soluções dos problemas que vos são pertinentes. Na Grécia, no momento em que emergem estes problemas, e mesmo hoje em qualquer lugar do mundo, além de serem utilizadas todas as ferramentas existentes para a solução de determinado problema, caso estas não sejam sufientes, criam-se novas ferramentas apropriadas.

> "A idéia por vezes expressa de que os gregos permitiam somente construções com régua e compasso é inadmissível. Ela é negada pelas numerosas construções que nos chegaram para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. No entanto, é verdade de que tais construções eram consideradas mais elementares, e Pappus afirma que sempre que uma construção for possível com régua e compasso métodos mais avançados não deveriam ser usados" (VAN DER WAERDEN, p. 263 apud (CARVALHO, 2004, p. 2)).

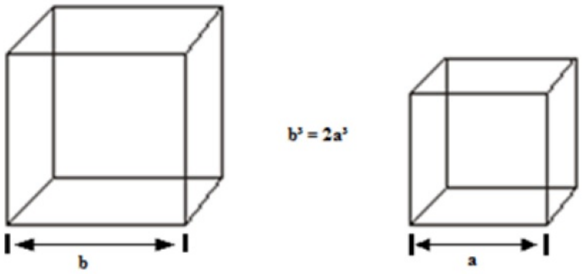
Os geômetras não conseguiram encontrar soluções para os problemas clássicos com o uso exclusivo de régua não graduada e compasso, estes problemas são impossíveis dada esta condição. René Descartes em 1637 em sua obra intitulada "A Geometria" aborda a impossibilidade da existência da solução destes problemas no âmbito da geometria euclidiana, no entanto, esta impossibilidade foi esclarecida apenas no séc. XIX, após os trabalhos de Abel e Gauss sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais. Assim, a impossibilidade dessas soluções dependem da teoria das equações cúbicas, isto é, de conceitos algébricos que foram sendo desenvolvidos ao longo de vários séculos. Conheceremos um pouco mais desses problemas agora, bem como explanaremos sobre a importância destes para a matemática da época. Lembramos que caso retiremos a condição de que a solução seja feita a partir do uso exclusivo de régua não graduada e compasso, todos os três problemas passam a ter solução. Durante o texto, sempre que dissermos sobre a solução de alguns dos problemas desta seção, proposta por algum matemático, estamos nos referindo a uma construção que não foi unicamente feita usando régua e compasso.

O problema da duplicação do cubo

O surgimento deste problema está atrelado a duas anedotas, das quais não podemos afirmar quanto a veracidade. Fato é que tal problema surgiu e teve seu desenvolvimento na Grécia antiga. Além disso, seu estudo foi feito na academia de Platão, uma vez que foram atribuídas soluções que não se enquadravam na geometria do primeiro livro de Euclides.

Segue o enunciado do problema: considere um cubo qualquer de aresta a. Determine, usando apenas régua não graduada e compasso, a aresta b de outro cubo, em que o seu volume seja o dobro do volume do primeiro cubo, isto é, construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado. A figura abaixo ajuda-nos a ilustrar o problema

Figura 3 – Problema da duplicação do cubo



Fonte: (GERVÁZIO, 2015).

Uma das anedotas sobre o surgimento deste problema, nos diz que o rei Minos mandou fazer um túmulo para o seu filho Glauco. Feito o túmulo, em formato cúbico de aresta medindo 100 pés, Minos achou que a construção tinha sido feita demasiadamente pequena e então ordenou que o túmulo fosse duplicado, entretanto, sem que o túmulo perdesse seu formato original.

A segunda lenda sobre o surgimento do problema nos diz que em 427 a.C. um quarto da população de Atenas havia sido dizimada por uma peste, incluindo um grande estadista da época, Péricles. Por conta destas causas, um grupo, preocupado com a praga que se espalhava, dirigiu-se ao oráculo do deus Apolo, com o intuito de receber uma resposta a fim de combater a praga. Foi aí que o oráculo vos disse que para que contivessem a praga seria necessário duplicar o volume do cubo que sustentava a estátua do deus Apolo. Assim, os arquitetos ficaram perplexos por não saberem como construir um cubo, cujo volume fosse duas vezes maior que o outro.

Hipócrates de Quios (viveu em torno de 430 a.C.) reduziu este problema ao de achar duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2. Depois desta redução, as próximas tentativas para a solução do problema, seguiram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de retas dados.

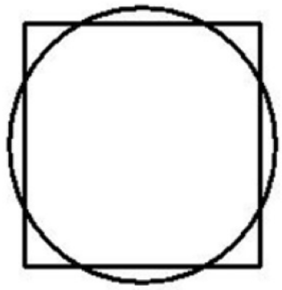
O problema da duplicação do cubo é impossível utilizando apenas régua não graduada e compasso, uma vez que se supormos que seja possível construir um segmento de medida b, utilizando apenas régua e compasso, tal que $b^3 = 2a^3$ e tomarmos $a = 1$ teríamos a equação $x^3 - 2 = 0$, cuja raíz é $\sqrt[3]{2}$, que é algébrica de grau 3 e não é potência de 2, portanto o segmento de medida $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído.

O problema da quadratura do círculo

Este talvez seja o problema grego mais natural e antigo. Seu enunciado nos pede que: dado um círculo qualquer, construir, usando apenas régua não graduada e compasso, um quadrado, cuja área seja igual à área desse círculo.

A figura abaixo nos mostra qual seria o quadrado a ser desenhado uma vez que aquele círculo havia sido dado:

Figura 4 – Problema da quadratura do círculo



Fonte: (GERVÁZIO, 2015)

Aristóteles indagava sobre o fato de que este problema poderia ter surgido através da busca da média geométrica. A primeira referência sobre este foi encontrada no Papiro de Rhind ou Ahmes, cerca de 1600 a.C.. Neste, é dada uma solução para o problema: o lado do quadrado deveria ser $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Apesar de não ser uma construção geométrica precisa, é uma boa aproximação, pois faz-se uso da aproximação $3,1605$ para o número π.

Outro dos possíveis motivos para o surgimento deste problema é o fato de que os gregos em seus problemas de construções geométricas, faziam uso de quadraturas de regiões planas. Do fato que o problema sobre como quadrar qualquer região poligonal havia sido completamente resolvido nos Elementos de Euclides, um problema natural a se surgir seria a respeito de quadrar regiões limitadas por linhas curvas e, desta forma, o círculo. Outra possível interpretação para o surgimento do problema é que este pode estar ligado ao problema da quadratura do retângulo, surgindo deste.

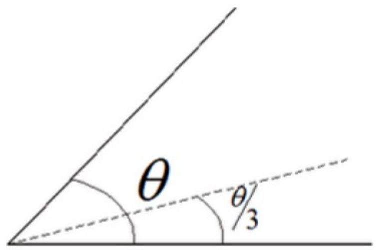
Muitos matemáticos trabalharam nesse problema, dentre os nomes principais para a construção que se pede temos Anaxágoras, o primeiro a obter uma solução para o problema, e em uma matemática mais recente, Srinivasa Ramanujan (1887-1920), nome que ainda veremos bastante neste trabalho, que propôs uma solução para o problema utilizando a aproximação $\pi \approx \frac{355}{113}$.

O fato pelo qual o problema da quadratura do círculo não tem solução usando apenas régua não graduada e compasso se dá, pois seria necessário construir um quadrado de lado x com $x^2 = \pi r^2$. Em particular, tomando $r = 1$ teríamos $x^2 = \pi$. Supondo possível construir um seguimento de medida π, porém π é transcendente e portanto impossível quadrar o círculo.

O problema da trissecção do ângulo

O problema da trissecção de um ângulo é: dado um ângulo qualquer, construir, usando apenas régua não graduada e compasso, um ângulo igual à terça parte do ângulo dado, ou seja, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais, como nos mostra a figura abaixo:

Figura 5 – Problema da trissecção do ângulo



Fonte: (GERVÁZIO, 2015)

A origem deste problema não é conhecida, mas muito nos leva a pensar que a necessidade de construir novos polígonos regulares pode ter sido a necessidade fundamental para a busca da solução deste problema. Já uma outra possível causa pode ser da curiosidade dos egípcios para determinarem o tempo da noite, sendo necessário medir ângulos entre estrelas. Outro motivo que mostra-se natural para o surgimento deste problema pode ter sido o surgimento como consequência da bisseção de um ângulo.

Um fato que curiosamente difere as características deste problema para os outros antes citados é o fato de que o surgimento deste problema não emerge de nenhuma lenda. Além disso, nos dois outros problemas clássicos, ainda que peguemos casos particulares, para valores de raios do círculo ou aresta para o cubo, não conseguimos exemplificar a solução destes problemas. Já no problema da trissecção do ângulo, alguns casos podem ser facilmente resolvidos para algum determinado ângulo dado. Um exemplo claro é a trissecção de um ângulo de 90° usando apenas régua não graduada e compasso: basta que sobre uma das arestas de um ângulo de 90° desenhemos um triângulo equilátero com a medida da própria aresta. Desta forma, teremos formado um ângulo de 30° entre a aresta do triângulo desenhado e a outra aresta do ângulo reto.

No período grego (séc. VI a.C. ao séc. V d.C.) apareceram muitas soluções para este problema, mas claro, não estavam de acordo com o requisito de se utilizar apenas régua não graduada e compasso. Para mostrarmos que o problema não possui solução dada a restrição do uso exclusivo de régua não graduada e compasso, basta apresentar um único ângulo que não pode ser trissecado. Caso o leitor se interesse por mais detalhes deste assunto, em (LUGLI, 2014) temos a prova da não possibilidade de trissecção do ângulo de 60°.

2.2 Os problemas de Hilbert

David Hilbert foi um matemático alemão, cujo trabalho em geometria teve a maior influência no campo desde Euclides. No ano de 1900 propôs em uma conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris uma lista de 23 problemas, dos quais nenhum deles possuíam solução até o momento. Vários destes problemas se tornaram muito influentes na matemática do século XX.

Os 23 problemas propostos por Hilbert, baseados na tradução de sua própria publicação, tidas em (HILBERT, 2020) são conhecidos com os seguintes títulos:

1 Problema de Cantor sobre a potência do Continuum. Dois sistemas, ou seja, dois conjuntos.

2 A não contradição dos axiomas da aritmética.

3 A igualdade do volume de dois tetraedros com as mesmas áreas da base e mesmas alturas.

4 O problema da linha reta como a menor distância entre dois pontos.

5 A noção de grupo contínuo de transformações de Lie sem a hipótese da diferenciabilidade das funções definidoras do grupo.

6 Tratamento matemático para os axiomas da física.

7 Irracionalidade e transcendência de determinados números.

8 O problema de números primos.

9 Prova da mais geral lei de reciprocidade em um corpo numérico qualquer.

10 A decisão sobre a resolubilidade de uma equação diofantina.

11 Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos.

12 Extensão do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos a um domínio de racionalidade algébrica qualquer.

13 Impossibilidade da resolução da equação geral do sétimo grau através de funções de somente 2 argumentos.

14 Prova da finitude de certos sistemas de funções completos.

15 Fundamentação rigorosa do cálculo enumerativo de Schubert.

16 Problema da topologia de curvas e superfícies algébricas.

17 Representação de formas definidas através de quadrados.

18 Construção do espaço a partir de poliedros congruentes.

19 As soluções de problemas regulares no cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?

20 Problemas gerais dos valores de fronteira.

21 Demonstração da existência de equações diferenciais lineares tendo grupo monodrômico prescrito.

22 Uniformização de relações analíticas por meio de funções automórfas.

23 Mais desenvolvimento dos métodos do cálculo de variações.

A fim de exemplificarmos um pouco sobre a importância desses problemas para a matemática, nos aprofundaremos um pouco no sétimo problema da lista, que trata sobre a irracionalidade e transcendência de determinados números, que possui o seguinte enunciado: Mostrar que a^b é transcendente se a e b forem algébricos com $a \neq 0, a \neq 1$, e b não racional. Um número complexo α é dito **algébrico** se é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros, enquanto que um número complexo α é dito **transcendente**, se ele não é algébrico.

O sétimo problema foi resolvido independentemente por Aleksandr Osipovich Gelfond (1906-1968) em 1934 e Theodore Schneider (1911-1988) no ano de 1935. Hoje este resultado é conhecido como o Teorema de Gelfond-Schneider.

Com a resolução deste problema, vieram novos métodos e pontos de vista da temática, como a técnica de Gelfond-Baker as quais sedimentou a área da Teoria dos Números Transcendentes e permitiram aplicações a outros ramos da matemática. Um outro trabalho que deriva deste problema foi desenvolvido por Baker em 1966 e que lhe rendera a medalha Fields no ano de 1970. Hoje conhecemos o resultado como o teorema de Baker e este nos diz que: dados $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ números algébricos, não nulos, tais que $\log \alpha_1, \cdots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $1, \log \alpha_1, \cdots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre $\bar{\mathbb{Q}}$, o conjunto dos números algébricos. O teorema de Baker tem como consequências os teoremas de Lindemann e Gelfond-Schneider.

Atualmente, alguns dos problemas de Hilbert encontram-se solucionados ou parcialmente solucionados, enquanto que outro montante ainda aguarda solução. Além disso, o quarto problema foi considerado um problema vago e o sexto não consiste de um problema matemático.

2.3 Os 7 problemas do milênio

O Clay Mathematics Institute é uma fundação privada sem fins lucrativos, localizada em Cambridge, Massachusetts, criada no ano de 1998. Seu criador é o empresário americano London T. Clay (1926–2017), que assim o fez com o intuito de "aumentar e disseminar o conhecimento matemático".

No ano de 2000 o instituto lançou uma iniciativa que se chama Problemas do Milênio, que consite em 7 problemas matemáticos os quais aquele que resolver qualquer um destes problemas recebe o montante de um milhão de dólares.

Os sete problemas do milênio são os seguintes:

1 P versus NP.

2 A conjectura de Hodge.

3 A conjectura de Poincaré (resolvido por Grigori Perelman).

4 A hipótese de Riemann.

5 A existência de Yang-Mills e a falha na massa.

6 A existência e suavidade de Navier-Stokes.

7 A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.

O único problema da lista já resolvido é a conjectura de Poincaré, que após a validação da resolução passou então a ser chamado, teorema de Poincaré. Este teorema afirma que a superfície tridimensional de uma esfera é o único espaço fechado de dimensão 3 onde todos os contornos ou caminhos podem ser encolhidos até chegarem a um simples ponto. Este problema foi proposto pelo matemático francês Henri Poincaré (1854–1912) em 1904 e resolvido no ano de 2003 pelo matemático russo Grigori Perelman(1966-).

Da resolução do problema, além do direito a receber a quantia de 1 milhão de dólares pelo seu grande feito, Perelman também recebeu a medalha Fields. Para o choque da comunidade matemática, ele recusou ambos. Segundo ele, seria injusto receber a quantia, já que usara o trabalho do americano Richard Hamilton (1943-). Além disso ele não demonstrou nenhum interesse pelos holofotes da mídia, já que segundo a fala do próprio, ele não queria ser considerado um herói.

Dentre os outros problemas que não temos solução até o momento, numa visão mais aplicada da matemática destaca-se o problema intitulado P versus NP.

Problemas do tipo P são problemas que os computadores resolvem o tempo todo e com certa facilidade, em que a medida que um problema cresce em complexidade, o tempo necessário para resolvê-lo aumenta em tempo polinomial. Existem muitos problemas em que se pode determinar que uma resposta está correta em tempo polinomial, mas, na verdade, chegar a essa resposta pode ou não ser possível em tempo polinomial. Estes são chamados de problemas NP.

O problema P versus NP pergunta se todo problema NP tem uma solução P, ou se existe algum problema NP que absolutamente não pode ser resolvido em P.

Caso surja uma prova de que P = NP, cairia por terra muitas das chaves de seguranças existentes na cripitografia moderna, por exemplo a chave de segurança dos bitcoins, uma vez que essa depende de problemas NP. Daí podemos observar a importância deste problema tanto para a matemática e computação enquanto teoria, quanto para a sua aplicação no cotidiano, uma vez que a solução deste problema coloca em jogo a segurança do sistema de uma moeda virtual que é fonte de investimento de muitas pessoas e que gira nas casas de centenas de bilhões de dólares. Caso o leitor se interesse mais sobre este assunto deixamos como sugestão a leitura de (MANDELBAUM, 2019) que traz falas inclusive do cientista da computação Scott Aaronson sobre a segurança dos Bitcoins.

3 Partições de Inteiros

Até agora tratamos dos problemas em matemática de forma geral, exemplificando alguns problemas clássicos bem como suas contribuições nas mais variadas teorias desta ciência. Neste capítulo, nossa discussão será com foco nos problemas da teoria das partições de inteiros. De início, faremos uma introdução sobre o assunto, trazendo conceitos básicos da teoria, como o conceito de partição, gráfico de Ferrers, identidades e funções geradoras. Posteriormente, trataremos sobre os problemas que circundam a teoria, como a evolução da fórmula de $p(n)$ e a busca por identidades. Além disso, faremos uma abordagem sobre alguns problemas em aberto da teoria das partições de inteiros. Para mais detalhes sobre o assunto, indicamos ao leitor (SANTOS; SILVA, 2012) e (MARTINS; CHRIST, 2020).

3.1 Introdução

A teoria das partições de inteiros possui muitos resultados clássicos e importantes que ajudaram no desenvolvimento da combinatória no século XX. Ela teve início no século XVIII com o Tratado de Euler, em que foi introduzido as partições de inteiros como nós conhecemos. Além disso, é um subtópico da teoria dos números, apelidada por Gauss como a "rainha da matemática", devido a sua grande importância.

Muitos matemáticos, como Hardy, Schur, Sylvester e Ramanujan ajudaram a desenvolver a teoria. Srinivasa Ramanujan, matemático indiano, que em 2015 teve sua trajetória contada no filme *"O homem que viu o infinito"*, enviou uma carta a Hardy em que dizia ter conseguido avanços em conjecturas que muitos sonhavam em demonstrar. Mais tarde, em Londres, em parceria com Hardy, vários resultados da teoria dos números foram demonstrados por Ramanujan. E antes de morrer, Ramanujan ainda enunciou outros importantes resultados que posteriormente foram demonstrados por outros matemáticos. Os resultados, identidades e enunciados de Ramanujan impulsionaram consideravelmente a teoria das partições, tornando objeto de estudo de muitos matemáticos.

Os conceitos principais da teoria das partições são simples e de fácil entendimento. Para cada inteiro positivo n, $p(n)$ é o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes, na qual a ordem dessas partes não importa. Cada uma dessas somas é chamada de **partição** de n.

Como exemplos, listamos a seguir as partições de 3, 4, 5 e 6.

			6
			$5+1$
		5	$4+2$
	4	$4+1$	$4+1+1$
3	$3+1$	$3+2$	$3+3$
$2+1$	$2+2$	$3+1+1$	$3+2+1$
$1+1+1$	$2+1+1$	$2+2+1$	$3+1+1+1$
	$1+1+1+1$	$2+1+1+1$	$2+2+2$
		$1+1+1+1+1$	$2+2+1+1$
			$2+1+1+1+1$
			$1+1+1+1+1+1$

Observe que $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$, além disso, quando falarmos de partições de 0, nós assumiremos como sendo igual a 1, ou seja, $p(0) = 1$, já que o único conjunto que a representaria seria o vazio. Para termos uma noção de quão rápido é o crescimento de $p(n)$ listamos a seguir alguns valores: $p(20) = 627$, $p(100) = 190569292$, $p(200) = 3972999029388$. Note que, pela definição, em uma partição de n nenhuma parte supera n, além disso, a ordem das partes não está sendo considerada.

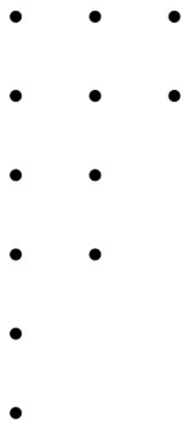
A representação gráfica de uma partição é de extrema valia, uma vez que nos traz a intepretação visual de uma partição, contribuindo de maneira significativa para a resolução de muitos problemas dentro da teoria. Uma partição de um inteiro n positivo pode ser representada graficamente por meio de um arranjo de n pontos no plano, constituído de s linhas em ordem não crescente. Em cada linha deste arranjo colocamos um número de pontos igual a cada uma de suas partes. Chamamos essa representação de **gráfico de Ferrers** da partição.

Como exemplos, seguem abaixo os gráficos de Ferrers das partições $5 + 4 + 4 + 1$ e $6 + 4 + 3 + 3 + 1$, respectivamente:

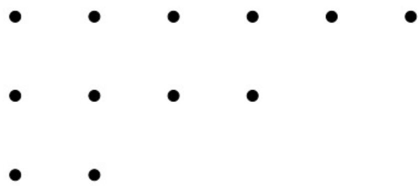
$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & & & &
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & &
\end{array}$$

Se no gráfico de Ferrers de uma partição de n trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos o gráfico de Ferrers de uma outra partição de n, que chamaremos de **partição**

conjugada da partição considerada. Os gráficos de Ferrers das partições $3+3+2+2+1+1$ e sua respectiva conjugada $6+4+2$ são:



e



Os principais problemas da teoria estão relacionados com o conceito de identidade e a busca por uma fórmula para $p(n)$. **Identidades** são afirmações do tipo: o número de partições de n dada a restrição A é igual ao número de partições de n dada a restrição B. Quanto à busca por uma fórmula para $p(n)$, sua primeira versão surge ainda no século XVIII com Euler, porém novas fórmulas para calcular $p(n)$ surgiram e foram melhoradas através dos séculos, atraindo matemáticos para a área. A última versão de uma fórmula para $p(n)$ foi publicada pelo matemático sul-coreano Ken Ono, em parceria com outros pesquisadores no ano de 2011.

Como dito no conceito de identidade, por vezes estamos interessados em partições de n satisfazendo determinada condição. Desta forma, $p(n \mid *)$ indicará o número de partições de n satisfazendo a condição $*$. A exemplo, abaixo temos uma identidade que nos diz que o número de partições de n em que k é a maior parte é igual o número das partições de n em exatamente k partes

$$p(n \mid k \text{ é a maior parte}) = p(n \mid \text{exatamente } k \text{ partes}). \tag{3.1}$$

Dentre as principais formas de demonstrações de resultados na teoria destacamos as **provas bijetivas** e as **provas através de funções geradoras**. Na primeira, buscamos uma bijeção entre dois conjuntos de partições; já na segunda, mostramos uma igualdade entre duas funções geradoras. Dada uma sequência $(a_r)_{r\in\mathbb{N}}$, a **função geradora ordinária** para esta sequência é definida como a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

A exemplo, temos a seguir algumas funções geradoras de partições. Observe que todas estão escritas como um produto infinito e não como uma soma infinita. Em 3.2.2

apresentaremos a prova da função geradora de $p(n)$ em partes irrestritas que nos traz uma argumentação sobre o porque isso pode ser feito naquele exemplo em específico, porém que pode ser aplicado de forma semelhante nos demais casos.

Figura 6 – Algumas funções geradoras para partições

Função geradora	Partições de n em partes que são
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k-1})$	ímpares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})$	pares e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^3})$	cubos e distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k^3}}$	cubos

Fonte: (SANTOS; SILVA, 2012)

3.2 A busca por uma fórmula para $p(n)$

A busca por uma fórmula para a função $p(n)$ foi um fator relevante no desenvolvimento da pesquisa em teoria de partições, uma vez que quanto maior o valor de n, maior era o valor de $p(n)$, que não parecia ter nenhum controle ou padrão de crescimento. Neste momento do trabalho, falaremos sobre um limitante para a função, veremos que a função $p(n)$ é limitada pelos números de Fibonacci. Posteriormente trataremos sobre o problema da busca de uma função para $p(n)$ e a evolução da fórmula.

3.2.1 Um limite superior para $p(n)$

Conforme n cresce, aparentemente $p(n)$ tende ao infinito. Intuitivamente é fácil de nos convencermos de que $p(n)$ é crescente, porém a formalização deste pensamento foi um primeiro problema a ser solucionado a respeito da fórmula. Neste sentido apresentamos abaixo a demonstração para esta questão.

Proposição 3.1. *Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ temos*

$$p(n) > p(n-1).$$

Demonstração. De fato, observe que, de cada partição de $n-1$ obtém-se uma partição de n se adicionarmos uma linha com um único ponto ao seu gráfico de Ferrers. Note também que cada partição de n possuindo em seu diagrama uma linha formada por um único ponto torna-se uma partição de $n-1$ se retirarmos esta linha. Assim temos,

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{não há parte igual a } 1) > p(n-1), \quad \forall n \geq 2 \tag{3.2}$$

e portanto, $p(n)$ é uma função crescente. □

Conhecido o fato de que $p(n)$ de fato é crescente, teóricos passaram a estudar o comportamento deste crescimento e naturalmente surge o problema relacionado a limitação para $p(n)$: existe um limitante para esta função? Como solução deste problema podemos mostrar que a função $p(n)$ é limitada pelos números de Fibonacci. Neste sentido, observemos agora que

$$p(n-2) = p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2). \tag{3.3}$$

De fato, acrescentando uma parte 2 em qualquer partição de $n-2$, obtemos partições de n com ao menos uma parte 2. E, inversamente, se removermos uma parte 2 das partições enumeradas por $p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2)$ obtemos partições de $n-2$.

Proposição 3.2. *Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ temos*

$$p(n \mid \textit{não há parte igual a } 1) \leq p(n \mid \textit{existe ao menos uma parte } 2).$$

Demonstração. Dada uma partição contada em $p(n \mid \text{não há parte igual a } 1)$, é claro que as partes dessa partição são maiores que 1. Podemos transformar cada partição com partes maiores que 1 em uma única partição com pelo menos uma parte 2, bastando dividir a menor parte λ (que é maior do que 1) em uma parte 2 e $\lambda - 2$ partes iguais a 1. E portanto, temos provado o resultado. □

Combinando (3.2) e a Proposição 3.2 temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2), \quad \forall n \geq 2 \tag{3.4}$$

Daí, de (3.4) e (3.3) temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \quad \forall n \geq 2 \tag{3.5}$$

Mostraremos agora que os números de Fibonacci controlam o crescimento de $p(n)$. Lembramos que os números de Fibonacci são definidos recursivamente da seguinte forma:

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 3.1. *Para todo inteiro não negativo n, temos que $p(n) \leq F_{n+1}$, em que F_{n+1} é o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração. Vamos provar o teorema fazendo indução sobre n. Primeiro note que

$$p(0) = 1 = F_1 \quad \text{e} \quad p(1) = F_1 = F_2 = 1,$$

ou seja, o resultado é válido para $n = 1$. Suponha agora, por hipótese de indução, que o resultado seja verdadeiro para todo $k < n$, com $k \geq 2$. De (3.5) temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2).$$

Aplicando a hipótese de indução e a definição dos números de Fibonacci temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \leq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo inteiro $n > 0$. □

Após termos os resultados de que $p(n)$ é crescente, e mais que isso, limitada pela sequência de Fibonacci, podemos nos dar por satisfeitos com este resultado? Pois bem, para muitos matemáticos este resultado já é bastante forte, uma vez que conseguimos encontrar uma relação entre dois elementos de natureza distintas, porém questões como a existência de outro limitante para $p(n)$ ou sobre a possibilidade de encontrarmos uma fórmula precisa para os valores das partições de n ainda se mantinham em aberto. Neste sentido, discutiremos a seguir sobre a evolução das fórmulas para $p(n)$.

3.2.2 Evolução da fórmula $p(n)$

No século XVIII, Euler empregou o uso de funções geradoras para contar o número de partições e obteve a seguinte recorrência:

$$\begin{aligned} p(n) = & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2} \right) \right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2} \right) \\ & = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) \\ & \quad - p(n-26) + p(n-35) + \cdots . \end{aligned}$$

Esta veio a ser a primeira fórmula para o cálculo de $p(n)$ e permitiu que este cálculo fosse feito de maneira mais rápida. A partir do aparecimento desta fórmula o novo problema que surge é a respeito da possibilidade de melhorá-la. Neste sentido, em 1919, Ramanujan e Hardy chegaram a uma fórmula assintótica: você põe n nessa fórmula e ela te dá uma resposta que é próxima de $p(n)$, mas nunca é $p(n)$. Logo, caso fizéssemos a divisão do número $p(n)$ obtido através da fórmula de Hardy-Ramanujam e dividíssemos este valor pelo $p(n)$ real obtemos um número bem próximo de 1, porém a diferença entre esses mesmos valores é grande e tende ao infinito conforme n tende ao infinito.

Posteriormente, no ano de 1937, Rademacher propôs um polimento na fórmula de Hardy e Ramanujan, uma vez que percebeu que a diferença entre o valor de $p(n)$ da fórmula e o $p(n)$ real seguia um padrão. Desta forma, Rademacher calculava o primeiro $p(n)$ assintótico e a diferença entre esse primeiro $p(n)$ e o $p(n)$ real; depois pegava essa diferença e achava um segundo $p(n)$ assintótico, mais próximo do $p(n)$ real, e calculava a diferença entre o segundo $p(n)$ assintótico e o $p(n)$ real; e assim por diante ao infinito. A partir deste método, com o auxílio de um computador, era possível se calcular com exatidão os valores para $p(n)$, entretanto, este método possui um defeito considerado grave, uma vez que para calcular $p(1) = 1$ que podemos fazer rapidamente e sem o auxilio do computador, através do método de Rademacher, fazia-se necessário somar uma quantidade infinita de parcelas, ou seja, a fórmula de Rademacher era tida como um dispositivo teórico, porém não prático. A fórmula de Hardy-Rademacher-Ramanujan tem a seguinte aparência:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dx} \frac{senh\left(\frac{\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x - \frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]_{x=n},$$

em que

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} e^{\frac{-2\pi i n h}{k} + \pi i s(h,k)},$$

com

$$s(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \left(\frac{\mu}{k} - \left\lfloor \frac{\mu}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h\mu}{k} - \left\lfloor \frac{h\mu}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Por muito tempo a fórmula para o cálculo de $p(n)$ não sofreu alterações. Para muitos matemáticos esta já era suficiente, uma vez que com o uso de um computador era possível conseguir o valor exato para $p(n)$. Porém, o fato desta fórmula não ser um bom dispositivo prático, pelo fato de ser uma soma infinita e por conta da forma com a qual calculava $p(1)$, um novo problema surgiu, ou seja, a busca por um novo aperfeiçoamento para a fórmula de $p(n)$. No ano de 2011, o matemático sul coreano Ken Ono, em parceria com outros matemáticos, propuseram uma nova fórmula para $p(n)$ em que foram utilizados conceitos de natureza fractal. Agora, inserindo um número inteiro positivo qualquer nesta fórmula, nos é devolvido uma quantidade finita de parcelas, das quais devem ser somadas para então chegarmos ao número exato de $p(n)$. A fórmula é dada por:

$$p(n) = \frac{1}{24n - 1}\left(P(\alpha_{n,1}) + P(\alpha_{n,2}) + \cdots + P(\alpha_{n,h_n})\right)$$

em que $P(\alpha_{n,m})$ são números algébricos.

Não é nossa intenção através deste trabalho abordarmos detalhes da fórmula acima. Deixamos como sugestão ao leitor que se interessar pelo processo de construção desta, uma palestra de Ken Ono discorrendo sobre o tema, disponível em <https://www.youtube.

com/watch?v=aj4FozCSg8g>. Nesta mesma palestra, Ono indica a leitura de algumas de suas publicações sobre a temática.

Observado o quanto a busca por uma fórmula precisa de $p(n)$ movimentou a teoria das partições por séculos e os avanços pelos quais esta passou, permanece ainda assim a questão sobre a necessidade, ou não, de um novo aprimoramento na fórmula desenvolvida por Ono e seus colaboradores. Apesar da fórmula para $p(n)$ ter avançado muito desde a sua primeira versão feita por Euler no século XVIII e atualmente possuirmos uma fórmula precisa, o cálculo de $p(n)$ não é uma tarefa tão simples, uma vez que através dessa fórmula somamos uma quantidade finita de parcelas, porém que tendem a ficar muito grandes conforme escolhemos um n grande. Existe a necessidade de um computador para podermos calcular $p(n)$ mesmo para valores de n nem tão grandes assim. Como nos é de conhecimento, $p(100) = 190569292$, logo os cálculos a serem relizados para que cheguemos neste resultado não são tão viáveis de serem feitos sem o uso de um computador, dado o fato que neste exemplo para chegarmos no resultado necessitamos de realizarmos uma soma de 100 parcelas e posteriormente dividirmos a soma por 2399 e ainda assim resultamos em um número de 9 dígitos.

Neste sentido, será que a fórmula para $p(n)$ ainda necessita de um novo aperfeiçoamento ou este resultado já é suficiente? Como visto até agora, apesar da fórmula ter evoluído significativamente com o passar do tempo, esta ainda é passível de melhoramento, uma vez que conforme o valor de n cresce, o número de parcelas da soma tende ao infinito. Porém, esta questão é muito pessoal para cada matemático, é visível que tem-se algo a melhorar, mas para grande parte da comunidade matemática pode ser que esta fórmula já seja o suficiente, porém nada impede que no futuro surjam novos problemas relacionados a teoria que necessitem de um novo aprimoramento desta. Assim, o problema quanto a busca e aprimoramento para uma fórmula de $p(n)$ depende de muitos fatores, podendo estar solucionado para uns, quanto em aberto para outros.

Uma função geradora para $p(n)$

Até o momento muito discutimos sobre como a busca e o aprimoramento da fórmula $p(n)$ impactou a teoria das partições. Como dito anteriormente, apesar de hoje termos um grande avanço na forma com a qual contamos $p(n)$, resta-nos ainda a questão sobre a importância ou não de se aprimorar a fórmula mais recente que conta o número de partições de n. Neste sentido, abaixo mostraremos uma outra forma de contar o número de partições de n, desta vez usando uma função geradora. Ou seja, mostraremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}, \text{ em que } p(0) = 1.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

se $|x| < 1$.

Quando consideramos expressões como $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$, sabemos do cálculo que estamos interessados na função definida por esta expressão e, portanto, nos importa o problema de sua convergência, isto é, quando $f(x)$ é finito. Desta forma não nos interessará os valores de x com $|x| \geq 1$. No nosso contexto de funções geradoras estamos interessados nos coeficientes e raramente iremos atribuir valores para x, sendo assim vamos manipular essas séries sem nos preocuparmos com convergência. Implicitamente, estaremos sempre considerando $|x| < 1$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \\ &\vdots \\ \frac{1}{1-x^m} &= 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + x^{4m} + \cdots \end{aligned}$$

daí,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\cdots)\cdots$$

e com isso concluimos que as contribuições para os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda série, de x^{3a_3} da terceira, ..., de x^{ma_m} da m-ésima série, em que $a_i \geq 0$, para todo i. Como o produto destes termos resulta em x^n, temos que

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + ma_m = n.$$

Cada a_i deve ser representado como a soma de i's que aparecem na partição de n, isto é, podemos expressar n da seguinte forma

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{a_1} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{a_2} + \cdots + \underbrace{m + \cdots + m}_{a_m},$$

em que o número 1 aparece a_1 vezes, o número 2 aparece a_2 vezes e assim sucessivamente. Desta forma, cada partição de n vai contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão.

Como exemplo do que acabamos de expor, suponha que em cada uma das quatro primeiras séries, tenhamos tomado, respectivamente as seguintes potências de $x : x^4, x^6, x^6, x^{12}$. Escrevamos estas potências da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^4 &= x^{1+1+1+1} \\ x^6 &= x^{2+2+2} \\ x^6 &= x^{3+3} \\ x^{12} &= x^{4+4+4}. \end{aligned}$$

Note que o produto das potências x acima resultam em x^{28} e com isso temos a seguite partição de 28 :

$$4+4+4+3+3+2+2+2+1+1+1+1.$$

Observe que o termo x^6 representa três 2 na segunda série e dois 3 na terceira série. Assim, as séries acima estão sendo vistas como

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=(1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\ldots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\ldots)\ldots$$

A função $\frac{1}{1-x}$ "controla", portanto, a presença dos 1's, $\frac{1}{1-x^2}$ a presença dos 2's, $\frac{1}{1-x^3}$ a presença dos 3's,... , $\frac{1}{1-x^m}$ a presença dos m's. Isto prova, portanto, que

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} \tag{3.6}$$

é a função geradora para partições irrestritas. Se estivermos interessados na função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera m, basta tomarmos:

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}.$$

3.3 Identidades em partições

Basicamente se queremos verificar que o número de objetos de um tipo A é igual ao número de objetos de um tipo B não precisamos contar esses elementos. É suficiente fazer pares com um objeto de cada conjunto, mostrando que cada objeto do tipo A faz par com um objeto do tipo B e vice-versa. Essa construção é o que chamamos de bijeção entre os conjuntos A e B.

Na teoria das partições, um conceito que contribuiu muito para a evolução da área, bem como trouxe a atenção de muitos matemáticos para esta, foi o conceito de identidade, que se assemelha muito ao que foi dito acima. Afirmações como "o número de partições de n do tipo A é igual o número de partições de n do tipo B" são chamadas de **identidades em partições**.

Problemas relacionados a identidades de partições ficaram muito famosos na teoria, já que por vezes não é viável o cálculo do número de partições de n para determinadas condições, ou para determinado n grande, porém, através de uma identidade, podemos encontrar famílias de partições que possuem um mesmo número de partições. Por conta disso, diversos problemas relacionados a partições emergiram na teoria e isso acontece corriqueiramente na área, conjecturam-se identidades que tornam-se um problema para a teoria e então busca-se a demonstração destes problemas. Como exemplo, temos abaixo o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Sejam n, k inteiros positivos. Então*

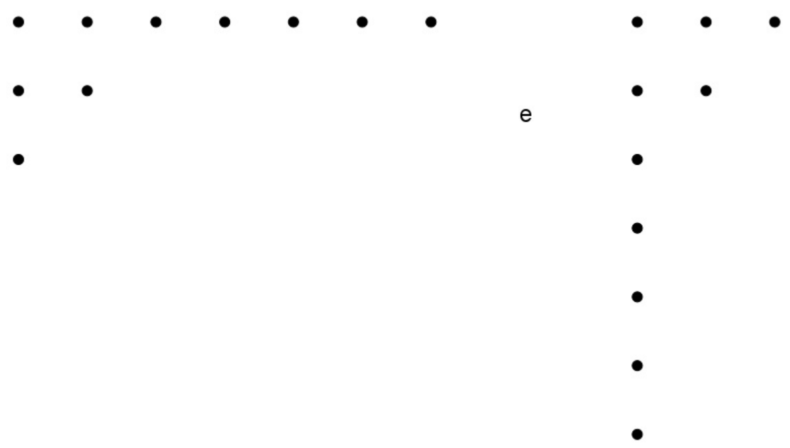
$$p(n \mid k \text{ é a maior parte}) = p(n \mid \text{exatamente } k \text{ partes}).$$

As demonstrações para as identidades são feitas principalmente de duas maneiras, através **funções geradoras** ou de bijeções, as chamadas **provas bijetivas**.

Nas provas através de funções geradoras, mostramos uma igualdade entre as duas funções que geram todas as partições do tipo A e todas as partições do tipo B. Já as provas bijetivas, consistem em se obter uma bijeção entre o conjunto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B. Recursos visuais como o gráfico de Ferrers podem ser aliados para as provas bijetivas, uma vez que tal recurso nos traz uma interpretação geométrica da partição o que pode facilitar a criação da bijeção a qual estamos propondo para a prova.

Abaixo apresentaremos como exemplo uma prova bijetiva para a identidade do Teorema 3.2, na qual o uso do gráfico de Ferrers pode auxiliar tanto na conjectura do problema, quanto em sua prova. Como processo de conjectura tome uma partição qualquer, como exemplo, tomaremos a partição $7 + 2 + 1$ de 10 que possui $k = 7$ como maior parte.

Caso apliquemos a operação conjugação nesta partição, resultaremos na partição $3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, como nos mostra a figura a seguir em que temos os gráficos de Ferrers de $7 + 2 + 1$ e $3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, respectivamente.



É fácil ver que como na operação conjugação definidada para os gráficos de Ferrers de partições as linhas viram colunas e que como a partição $7+2+1$ possui 7 pontos em sua primeira linha, quando esta por meio do processo de conjugação tornar-se coluna da nova partição esta coluna também terá 7 pontos. Do fato de que todas as linhas subsequentes do gráfico de $7 + 2 + 1$ são menores que ou iguais a 7, quando conjugarmos estas linhas, as colunas geradas serão menores que ou iguais a 7 e daí teremos uma nova partição que possui 7 partes. Caso conjuguemos a partição $3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ retornaremos para a partição $7 + 2 + 1$, ficando claro que dada a partição com 7 partes retornamos a partição que possui 7 como a maior parte.

Visto que a identidade é verdadeira para este caso em especial, não é dificil de nos convencermos que o resultado é verdadeiro para qualquer n inteiro positivo e $k \leq n$.

Demonstração do Teorema 3.2. Usando a conjugação definida no conjunto das partições n, vemos facilmente que toda partição tendo k como maior parte é transformada em uma partição que possui exatamente k partes e vice-versa. □

Nem sempre o uso do gráfico de Ferrers se faz necessário para a demonstração ou conjectura de identidades. A seguir trazemos o teorema de Euler, uma identidade que faz relação entre partes ímpares e partes distintas. Se listarmos as partições para alguns valores de n, inteiros positivos quaisquer, muitos problemas podem ser criados, uma vez que uma série de conjecturas podem ser formuladas. Nesta perspectiva, um dos possíveis problemas a serem criados é o que chamamos hoje de teorema de Euler, que nos diz que:

Teorema 3.3 (Euler)**.** *Seja n um inteiro positivo. Então*

$$p(n \mid \textit{partes são ímpares}) = p(n \mid \textit{partes são distintas}).$$

Demonstração. Basta-nos definirmos as seguintes operações:

Operação 1 - De partes ímpares para partes distintas: dada uma partição de n em partes ímpares, se a partição não possuir partes iguais, não há o que fazer. Caso contrário, se tal partição possuir ao menos duas partes iguais, somaremos duas a duas essas partes iguais e repetiremos esse procedimento até que todas as partes sejam distintas, ou até que sobre apenas uma parte.

Operação 2 - De partes distintas para partes ímpares: dada uma partição de n em partes distintas, caso todas as partes distintas sejam ímpares não temos nada a fazer. Caso contrário, pegaremos cada parte par e a dividiremos por dois, originando duas novas partes iguais e repetiremos esse procedimento até que todas as partes restantes sejam ímpares.

Denotando por A e B os conjuntos formados pelas partições de n em partes ímpares e partes distintas, respectivamente, temos que $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(\lambda) = \mu$, em que μ é a partição obtida a partir de $\lambda \in A$ pela operação 1, é uma bijeção, e devido a Operação 2, $f^{-1}(\mu) = \lambda$. Com isso temos a prova bijetiva do teorema. □

Como nos diz (POLYA, 2006) no quarto momento de seu método de resolução de problemas matemáticos, a reflexão sobre a resolução do problema é de tremenda importância e, quando possível, devemos aperfeiçoar este resultado. Por mais que isso possa parecer um capricho matemático, existe uma fundamentação lógica, uma vez que através dessa tentativa de melhorar a solução do problema pode ser que surjam novas abordagens para a teoria que molda o problema em questão. A aplicação de novas técnicas em problemas já solucionados tendem a render frutos para a teoria, tão quanto tem o poder de gerar novas teorias. É neste sentido que faremos agora a demonstração do teorema de Euler, com o uso de funções geradoras, abordagem presente e de grande valia na resolução de problemas na teoria das partições.

Demonstração do Teorema 3.3 através do uso de funções geradoras. Sabemos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares é igual a

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Basta-nos portanto, provarmos a igualdade entre essas duas funções. Assim,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x^k)(1-x^k)}{(1-x^k)}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2k})}{(1-x^k)}\\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.
\end{aligned}$$

□

3.3.1 As identidades de Rogers-Ramanujan

Dentre as identidades existentes na teoria das partições, as identidades de Rogers-Ramanujam possuem um certo status. Um fato interessante sobre essas identidades é que ambas não possuem uma prova bijetiva, apesar de terem mais de um século de existência, elas possuem apenas provas através de funções geradoras. Conheceremos agora as duas identidades de Rogers-Ramanujam, mas, para isso, necessitamos conhecer o conceito de partes **d-distintas**.

Dizemos que uma partição tem partes **d-distintas** se a diferença entre as partes é de pelo menos d. Veja por exemplo na Tabela 1 as partições em partes 2-distintas dos 11 primeiros inteiros positivos.

Tabela 1 – Partições em partes 2-distintas

n	Quantidade	Partições em partes 2-distintas
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	4, 3+1
5	2	5, 4+1
6	3	6, 5+1, 4+2
7	3	7, 6+1, 5+2
8	4	8, 7+1, 6+2, 5+3
9	5	9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1
10	6	10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+3+1
11	7	11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Com base na tabela acima iremos construir um conjunto N tal que

$$p(n \mid \text{partes em } N) = p(n \mid \text{partes 2-distintas}).$$

Construiremos N como $\lim\limits_{i\to\infty} N_i$, com N_i construído para cada i. Começaremos com N_0 e então:

- Deve existir uma partição de 1 com partes em N. Com partes em $N_0 = \emptyset$ não há partição de 1, logo devemos ter $1 \in N$. Tome $N_1 = \{1\}$.
- Deve existir uma partição de 2 com partes em N. Como há uma partição de 2 com partes em $N_1 = \{1\}, 1+1$, segue que $2 \notin N$. Tome $N_2 = N_1$.
- Deve existir uma partição de 3 com partes em N. Como há uma partição de 3 com partes em $N_2 = \{1\}, 1+1+1$, segue que $3 \notin N$. Tome $N_3 = N_2$.
- Devem existir duas partições de 4 com parte em N. Com partes em $N_3 = \{1\}$ há apenas uma partição de $4, 1+1+1+1$, logo devemos ter $4 \in N$. Tome $N_4 = N_3 \cup \{4\}$.
- Devem existir duas partições de 5 com partes em N. Com partes em $N_4 = \{1, 4\}$, há duas partições de $5 : 4+1, 1+1+1+1+1$, logo $5 \notin N$. Tome $N_5 = N_4$.
- Devem existir três partições de 6 com partes em N. Com partes em $N_5 = \{1, 4\}$ há duas partições de $6 : 4+1+1, 1+1+1+1+1+1$, logo devemos ter $6 \in N$. Tome $N_6 = N_5 \cup \{6\}$.
- Devem existir três partições de 7 com partes em N. Com partes em $N_6 = \{1, 4, 6\}$ há três partições de $7 : 6+1, 4+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1$, logo $7 \notin N$. Tome $N_7 = N_6$.

- Devem existir quarto partições de 8 com partes em N. Com partes em $N = \{1, 4, 6\}$ há quatro partições de $8 : 6+1+1, 4+4, 4+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1$, logo $8 \notin N$. Tome $N_8 = N_7$.

- Devem existir cinco partições de 9 com partes em N. Com partes em $N = \{1, 4, 6\}$ há 4 partições de $9 : 6+1+1+1, 4+4+1, 4+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1+1$, logo $9 \in N$. Tome $N_9 = N_8 \cup \{9\}$.

- Devem existir seis partições de 10 com partes em N. Com partes em $N = \{1, 4, 6, 9\}$ há 6 partições de $10 : 9+1, 6+4, 4+4+1+1, 4+1+1+1+1+1+1, 6+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$, logo $10 \notin N$. Tome $N_{10} = N_9$.

- Devem existir sete partições de 11 com partes em N. Com partes em $N = \{1, 4, 6, 9\}$ há partições de $11 : 9+1+1, 6+4+1, 4+4+1+1+1, 6+1+1+1+1+1, 4+1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$, logo $11 \in N$. Tome $N_{11} = N_{10} \cup \{11\}$.

Até aqui obtivemos $N \supseteq N_{11} = \{1, 4, 6, 9, 11\}$. Prosseguindo com a argumentação acima, pode-se verificar que $N = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24, \ldots\}$. Observe que os elementos em N são inteiros que deixam resto 1 ou 4 quando divididos por 5, ou seja, os elementos de N são todos os inteiros congruentes a 1 ou 4 módulo 5. Com base na investigação que fizemos acima, podemos conjecturar a seguinte identidade

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \bmod 5) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas}),$$

chamada de **primeira identidade de Rogers-Ramanujan**. Note que não provamos esta identidade, apenas temos evidências, com base em alguns poucos exemplos, de que ela possa ser verdadeira. Para tal identidade cabe-se uma demonstração analítica.

O mesmo método citado anteriormente pode ser empregado para descobrir a **segunda identidade de Rogers-Ramanujan**:

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \text{ ou } 3 \bmod 5) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas e} > 1).$$

Neste trabalho não apresentaremos a demonstração das identidades de Rogers-Ramanujan. Como dito anteriormente, ambas as identidades possuem um status na teoria e temos provas através do uso de funções geradoras para estas. Apesar deste fato, muitos matemáticos consideram este problema em aberto uma vez que aguardam e/ou buscam por uma prova bijetiva para este problema. Como viemos discutindo até aqui, o aperfeiçoamento e novas abordagens para problemas que já apresentam solução tem extrema valia para matemática.

3.3.2 A identidade de Schur

Muitas das identidades que vimos até agora têm a forma

$$p(n \mid [\text{alguma condição}]) = p(n \mid \text{partes em N}), \forall n > 0,$$

é o caso por exemplo, das identidades de Rogers-Ramanujan. Através do mesmo método com o qual redescobrimos as identidades de Rogers-Ramanujan, podemos conjecturar o que conhecemos hoje como a **identidade de Schur**. Vale lembrar que a conjectura em matemática é o processo da criação de um problema. Uma vez que observada a repetição de determinado padrão, propõe-se uma afirmação a qual será colocada a prova. Neste sentido conheceremos abaixo a forma com a qual podemos conjecturar a identidade de Schur, que se trata de uma identidade sobre partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3.

Primeiro faremos uma tabela na qual listaremos todas as partições, para $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$, com partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3. Com base nessa tabela, vamos construir um conjunto S tal que $p(n \mid \text{partes em } S) = p(n \mid \text{partes 3-distintas e sem partes consecutivas divisíveis por 3})$.

Tabela 2 – Partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3

n	Quantidade	Partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	2	5, 4+1
6	2	6, 5+1
7	3	7, 6+1, 5+2
8	3	8, 7+1, 6+2
9	3	9, 8+1, 7+2
10	4	10, 9+1, 8+2, 7+3
11	5	11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4
12	6	12, 11+1, 10+2, 9+3, 8+4, 7+4+1
13	7	13, 12+1, 11+2, 10+3, 9+4, 8+5, 8+4+1

Fonte: (MARTINS; CHRIST, 2020)

Construiremos S como $\lim\limits_{i \to \infty} S_i$, com S_i construído para cada i. Começaremos com $S_0 = \emptyset$ e então:

- Deve existir uma partição de 1 com partes em S. Com partes em $S_0 = \emptyset$ não há partição de 1, logo, devemos ter $1 \in S$. Tome $S_1 = S_0 \cup \{1\}$.

- Deve existir uma partição de 2 com partes em S. Como há uma partição de 2 em $S_1 = \{1\}, 1+1$, segue que $2 \notin S$. Tome $S_2 = S_1$.

- Deve existir uma partição de 3 com partes em S. Como há uma partição de 3 em $S_2 = \{1\}, 1+1+1$, segue que $3 \notin S$. Tome $S_3 = S_2$.

- Deve existir uma partição de 4 com partes em S. Como há uma partição de 4 em $S_3 = \{1\}, 1+1+1+1$, segue que $4 \notin S$. Tome $S_4 = S_3$.

- Devem existir duas partições de 5 com partes em S. Com partes em $S_4 = \{1\}$, há apenas uma partição de $5 : 1+1+1+1+1$. Assim devemos ter $5 \in S$. Tome $S_5 = S_4 \cup \{5\}$.

- Devem existir duas partições de 6 com partes em S. Como há duas partição de 6 em $S_5 = \{1, 5\}$, $1+1+1+1+1+1$ e $5+1$, segue que $6 \notin S$. Tome $S_6 = S_5$.

- Devem existir três partições de 7 com partes em S. Com partes em $S_6 = \{1, 5\}$, há apenas duas partições de $7 : 1+1+1+1+1+1+1$ e $5+1+1$. Assim devemos ter $7 \in S$. Tome $S_7 = S_6 \cup \{7\}$.

- Devem existir três partições de 8 com partes em S. Como há três partições de 8 em $S_7 = \{1, 5, 7\}, 1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1$ e $5+1+1+1$, segue que $8 \notin S$. Tome $S_8 = S_7$.

- Devem existir três partições de 9 com partes em S. Como há três partições de 9 em $S_8 = \{1, 5, 7\}$, $1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1$ e $5+1+1+1+1$, segue que $9 \notin S$. Tome $S_9 + S_8$.

- Devem existir quatro partições de 10 com partes em S. Como há quatro partições de 10 em $S_9 = \{1, 5, 7\}, 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1, 5+5$ e $5+1+1+1+1+1$ segue que $10 \notin S$. Tome $S_{10} = S_9$.

- Devem existir cinco partições de 11 com partes em S. Com partes em $S_{10} = \{1, 5, 7\}$, há apenas quatro partições de $11 : 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1+1, 5+5+1$ e $5+1+1+1+1+1+1$. Assim devemos ter $11 \in S$. Tome $S_{11} = S_{10} \cup \{11\}$.

- Devem existir seis partições de 12 com partes em S. Com partes em $S_{11} = \{1, 5, 7, 11\}$, há seis partições de $12 : 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1+1+1, 5+5+1+1$, $5+1+1+1+1+1+1+1$, $11+1$ e $7+5$. Assim devemos ter $12 \notin S$. Tome $S_{12} = S_{11}$.

- Devem existir sete partições de 13 com partes em S. Com partes em $S12 = \{1, 5, 7, 11\}$, há apenas quatro partições de $13 : 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+$

$1+1+1, 7+1+1+1+1+1+1+1, 5+5+1+1+1, 5+1+1+1+1+1+1+1+1,$
$11+1+1$ e $7+5+1$. Assim devemos ter $13 \in S$. Tome $S_{13} = S_{12} \cup \{13\}$.

Até aqui obtivemos $S \supseteq S_{13} = \{1, 5, 7, 11, 13\}$. Prosseguindo com a argumentação acima, pode-se verificar que $S = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, \ldots\}$. Observe que os inteiros em S são congruentes a ± 1 mod 6 e com isso podemos conjecturar que:

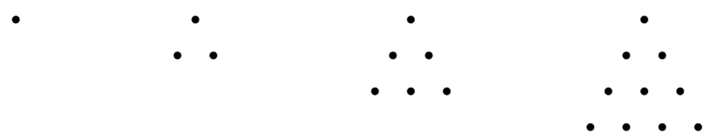
$$p(n \mid \text{partes} \equiv \pm 1 \bmod 6) = p(n \mid \text{partes 3-distintas e sem partes múltiplas consecutivas de 3}),$$

que é conhecida como a identidade de Schur.

3.3.3 Teoremas dos números poligonais

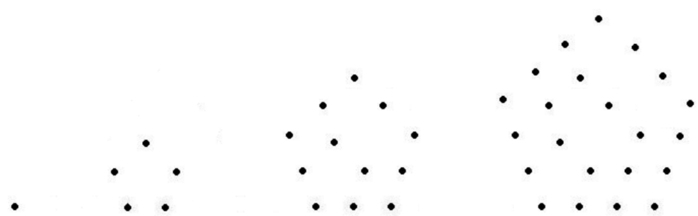
Elaborados pelos pitagóricos, os *números figurados* são números expressos como reunião de pontos numa determinada configuração geométrica, ou seja, um número é representado por uma quantidade de pontos que são agrupados em formas sugestivas. Destes números, os mais estudados têm sido os números poligonais, dos quais destacamos os triangulares e os pentagonais. Euler foi o responsável por propor e solucionar problemas na teoria das partições, fazendo uso destes dois tipos de números poligonais. Abaixo conheceremos estes problemas que hoje são tidos como resultados, mas antes conheceremos o que são os números triangulares e os números pentagonais.

Definição 3.1. *Os **números triangulares** são* $1, 3, 6, 10, \ldots$*, referentes ao número de pontos nos triângulos equiláteros em ordem crescente:*

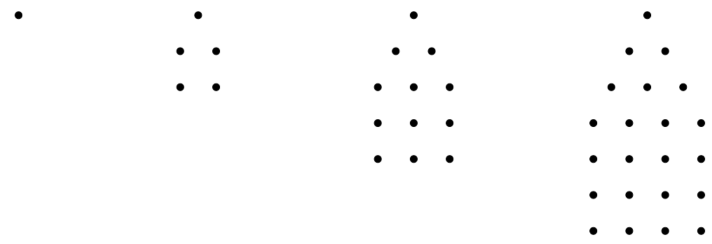


O j-ésimo número triangular é dado por $1+2+3+\cdots+j = \dfrac{j(j+1)}{2}$. De maneira análoga, podemos definir os números pentagonais.

Definição 3.2. *Os números pentagonais são* $1, 5, 12, 22, \ldots$*, referentes ao número de pontos nos pentágonos regulares abaixo:*



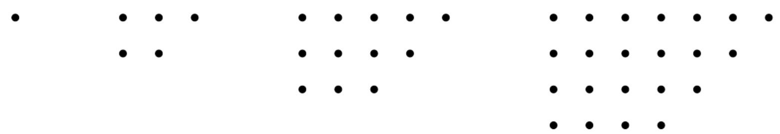
Vamos agora representar os números pentagonais da seguinte forma:



Desta forma, vemos que o j-ésimo número pentagonal consiste em um triângulo equilátero de lado j sobre um retângulo de lados j e $j-1$, com isso, o j-ésimo número pentagonal é

$$\frac{j(j+1)}{2} + j(j-1) = \frac{j(3j-1)}{2}.$$

A partir da representação gráfica dos números pentagonais acima podemos obter gráficos de Ferrers de partições rotacionando os diagramas e alinhando suas linhas à esquerda:



Teorema 3.4 (Teorema dos Números Pentagonais de Euler)**.** *Seja n um inteiro positivo. Então*

$$p(n \mid \textit{número par de partes distintas}) = p(n \mid \textit{número ímpar de partes distintas}) + e(n),$$

em que

$$e(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \textit{se} \quad n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2} \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1. *Para um melhor entendimento do Teorema 3.4, tomemos como exemplo as aplicações deste para $n = 5$ e depois $n = 6$.*

Conforme vimos na Seção 3.1 as partições de 5 e 6 são, respectivamente:

	6
	$5+1$
5	$4+2$
$4+1$	$4+1+1$
$3+2$	$3+3$
$3+1+1$	$3+2+1$
$2+2+1$	$3+1+1+1$
$2+1+1+1$	$2+2+2$
$1+1+1+1+1$	$2+2+1+1$
	$2+1+1+1+1$
	$1+1+1+1+1+1$

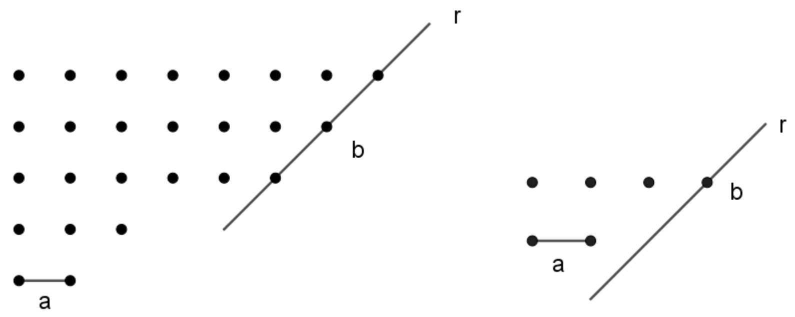
Observe que para $n=5$ as partições em um número par de partes distintas são: $3+2$ e $4+1$. A única partição com um número ímpar de partes distintas é a partição 5. Neste caso, existe uma partição em um número par de partes distintas a mais que o número de partições em um número ímpar de partes distintas. Como 5 é um número pentagonal, com $j=2$, $e(n)=1$ e portanto o teorema é verificado neste caso.

Já no caso em que $n=6$, as partições em um número par de partes distintas são: $5+1$ e $4+2$, enquanto que as partições em um número ímpar de partes distintas são: 6 e $3+2+1$. Como $n=6$ não é um número pentagonal nem do tipo $\dfrac{j(3j+1)}{2}$, a igualdade do teorema é satisfeita, com $e(n)=0$.

Demonstração do Teorema 3.4. A prova que faremos se dará, principalmente, por meio de duas transformações utilizando o gráfico de Ferrers das partições. Definiremos abaixo alguns elementos no gráfico de Ferrers de uma partição de n em partes distintas:

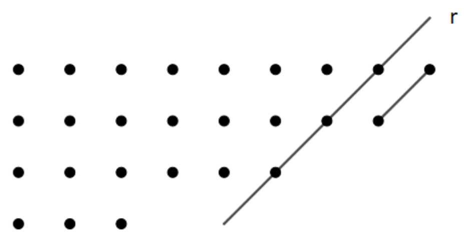
- a é a menor parte desta partição.
- k é a maior parte da partição em questão.
- r será a reta que passa pelo ponto k da primeira parte e pelo ponto $k-1$ da segunda, independentemente se a partição só tiver uma parte, ou se a segunda parte da partição não tiver exatamente uma unidade a menos do que a primeira.
- b é o número de pontos da partição que estão sobre a reta r.

As ilustrações abaixo nos ajudam entender estas definições:

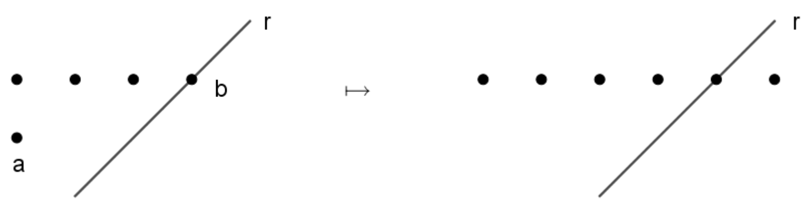


Conheceremos agora as duas transformações a serem realizadas com o uso dos gráficos de Ferres das partições distintas fazendo uso das definições acima. Existe um caso especial no qual nenhuma das duas transformações que conheceremos a seguir poderão ser realizadas, que é quando r passa pelo último ponto da menor parte, ocorrendo em alguns casos em que $a = b$ ou quando $a = b + 1$. Este caso deixa clara a razão para o teorema trazer em seu nome os números pentagonais e será tratado no fim da demonstração.

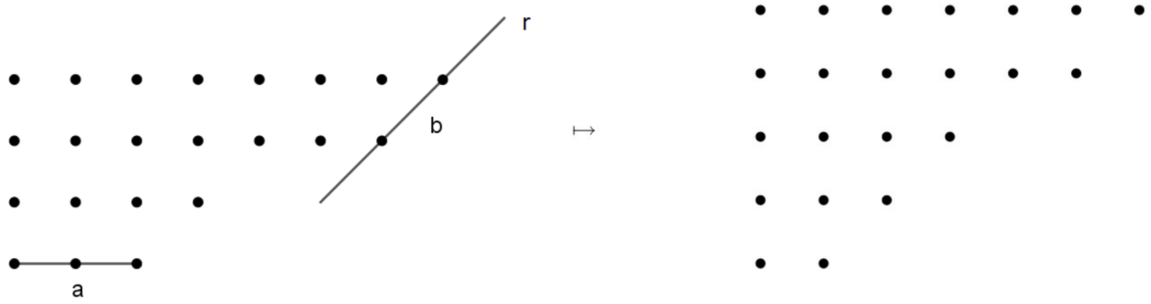
A primeira transformação deve ser feita quando $a \leq b$ ($a = b$ apenas se r não passa pelo último ponto da menor parte). Tomemos como exemplo o primeiro gráfico acima. Removeremos os a pontos e os colocaremos paralelos a reta r de forma que ocupem as primeiras linhas do gráfico de Ferrers:



Feita tal mudança podemos observar que temos uma nova partição de n, possuindo partes distintas e representadas em ordem decrescente e com paridade diferente da anterior, ou seja, se o total de partes era par, agora é ímpar e se era ímpar, agora é par. Note também que, ainda que tivéssemos $a = b$ e r não passando pelo último ponto da menor parte, a mudança acima ainda teria sido possível, conforme o exemplo abaixo nos mostra:

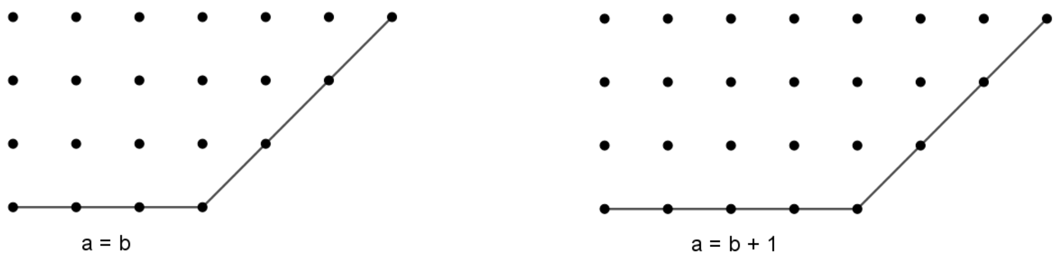


Vejamos agora, a transformação a ser feita quando $a > b$. Neste caso podemos tomar os b pontos da linha r e colocá-los abaixo da parte de tamanho a. Desta forma teremos uma nova partição com paridade diferente. Feita tal alteração na partição continuaremos com uma partição em partes distintas e colocadas em ordem decrescente em seu gráfico de Ferrers. Os gráficos de Ferrers abaixo nos ajudam a entender melhor:



Quando uma das transformações acima puder ser feita, teremos uma correspondência biunívoca entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas, ou seja, o caso em que n não é um número da forma $n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$. Porém, conforme dito anteriormente, temos o caso especial que ocorre quando a linha r passa pelo último ponto da menor parte, ocorrendo em alguns casos de $a = b$ ou então quando $a = b + 1$.

Com a ajuda dos gráficos abaixo fica fácil ver que não podemos fazer nenhuma das transformações descritas até então, já que sempre que executada uma destas transformações, devemos ter partes distintas e dispostas em ordem decrescente.



Nas figuras acima temos

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + (a + (b - 1)) = \frac{b(2a + b - 1)}{2}.$$

No caso em que $a = b$, temos $n = \dfrac{b(3b - 1)}{2}$. Logo, se b, que é o número de partes for par, teremos

$$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = 1,$$

uma vez que teremos uma partição a mais composta por um número par de partes distintas e que não se pode fazer nenhuma das transformações acima.

Porém, se b for ímpar,

$$p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = p(n \mid \text{número par de partes distintas}) + 1,$$

uma vez que teremos uma partição a mais composta por um número ímpar de partes distintas e que não se pode fazer nenhuma das transformações acima, ou seja,

$$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = -1.$$

A mesma abordagem feita para o caso de $a = b$ pode ser feita para o caso em que $a = b + 1$. Desta forma, podemos concluir que

$$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = (-1)^b.$$

□

Vamos enunciar agora um teorema envolvendo a função geradora para os números triangulares, que possui uma prova bijetiva semelhante à do Teorema dos Números Pentagonais dada por F. Franklin.

Teorema 3.5. *Para* $|q| < 1$

$$1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{3.7}$$

A soma do lado esquerdo da equação acima conta as partições em que as partes são maiores do que 1, as partes pares são distintas, a maior parte é ímpar e tendo um peso associado dado por $(-1)^m$ em que m é o número de partes pares. Além disso, os expoentes do lado direito da equação acima são os números triangulares. Note que a equação abaixo é equivalente a Equação (3.7).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{3.8}$$

O objetivo para provar a equação acima, é mostrar que os coeficientes de q^n do lado esquerdo são iguais a 1 se n é um número triangular e 0, caso contrário. Para uma prova bijetiva deste teorema, nos mesmo moldes da prova do teorema dos números pentagonais de Euler veja (MARTINS; CHRIST, 2020).

3.4 Representações matriciais para partições

Como nos é de conhecimento, as funções geradoras e as provas bijetivas são as duas principais ferramentas para a solução de problemas na teoria das partições. Na resolução de problemas em matemática e, consequentemente desenvolvimento e/ou aperfeiçoamento de novas teorias, novas técnicas são constantemente incorporadas a fim de tentar expandir o conhecimento já existente. Atualmente, outra maneira de se representar partições vem sendo objeto de estudos de alguns pesquisadores, a representação matricial de partições, e com isso novos problemas vêm aparecendo. Além disso, têm-se a ideia de que a representação matricial de partições pode vir a se tornar uma eficiente ferramenta na teoria, promovendo tanto a melhora de resultados existentes, quanto a solução de problemas em aberto. Abaixo, apresentaremos alguns resultados sobre essas representações matriciais de duas linhas, bem como as representações matriciais das partições de n dadas as restrições das duas identidades de Rogers-Ramanujam. Caso o leitor queira conhecer mais a fundo o processo de construção das representações matriciais de duas linhas para partições, bem como novos resultados que foram propostos a partir disto, indicamos (WAGNER, 2016) e (SANTOS; MONDEK; RIBEIRO, 2011).

3.4.1 Representações matriciais para $p(n)$

Como vimos até o momento, são muitas as formas de se contar o número de partições de um inteiro positivo n. Dentre as maneiras de se realizar esta tarefa, talvez a menos viável seja fazermos a listagem das partições de n, tanto é que, como visto na seção (3.2), um dos problemas que mais impulsionaram a teoria das partições de inteiros foi justamente a busca por uma fómula de se calcular $p(n)$, que passou por inúmeros processos de inovação até ter seu último aperfeiçoamento feito por Ono e seus colaboradores. Outra forma vista até este momento de se estudar $p(n)$ é através da função geradora (3.6).

Dada a importância do cálculo de $p(n)$ para a teoria, muitos são os problemas que aparecem relacionados a este cálculo. Desta maneira, numa abordagem mais atual da teoria, problemas relacionados a representações matriciais de partições vêm ganhando destaque. Apresentaremos abaixo algumas das representações matriciais existentes relacionadas as partições irrestritas.

Teorema 3.6. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que, $c_s = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ *e* $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n.$

Teorema 3.7. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que, $c_s > 0, c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ *e* $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n.$

Teorema 3.8. *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que, $d_t > 0$, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ *e* $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

As demonstrações dos três teoremas anteriores são técnicas e podem ser encontradas nas referências citadas no início da seção. Gostaríamos apenas de levantar algumas discussões. Primeiro observe que, os resultados de certa forma transferem o problema de contar o número de partições, ou seja, calcular $p(n)$ para o cálculo da quantidade de matrizes satisfazendo determinadas condições. Obviamente, não se trata de obter uma maneira simples de calcular $p(n)$, afinal não parece ser simples contar a quantidade dessas matrizes. No entanto, essa busca por novos resultados sobre $p(n)$ trouxe a teoria de matrizes para o contexto das partições. E em matemática, muitas vezes, uma simples ponte entre teorias, assim como essa, pode culminar num desenvolvimento de novas técnicas e resultados. Basicamente, esses estudos atuais sobre essas novas representações matriciais de partições são pautados nisso. Utilizar essa ponte e tentar trazer resultados já conhecidos de matrizes para agregar no desenvolvimento da teoria de partições.

3.4.2 Representações matriciais para as identidades de Rogers-Ramanujan

Conforme já comentado as representações matriciais para partições têm ganhado espaço na teoria e através delas, muitos problemas vêm surgindo e outros vêm sendo aperfeiçoados. Como as identidades de Rogers-Ramanujan vêm sendo tema de discussão deste trabalho, justamente pelo fato delas serem um problema em aberto para alguns matemáticos que aguardam uma prova bijetiva para as identidades, abaixo enunciaremos as representações matriciais para as partições restritas que compõem as duas identidades de Rogers-Ramanujan, ou seja, as novas representações que geram novas abordagens para estes problemas na atualidade.

Representação matricial para a primeira identidade de Rogers-Ramanujan

A primeira identidade de Rogers-Ramanujan é dada por

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \bmod 5) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas}).$$

Desta forma enunciaremos abaixo as representações matriciais das partições de n com partes $\equiv \pm 1 \bmod 5$ e posteriormente em partes 2-distintas.

Teorema 3.9. *O número de partições de n em partes congruentes a ± 1 mod 5 é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \quad se \quad s \geq 2 \quad e \quad c_s = 0 \quad se \quad s = 1;$$

$$c_{2i-1} = 5d_{2i+1} + 5d_{2i+3} + \cdots;$$

$$c_{2i} = 5\frac{d_{2i+2}}{4} + 5\frac{d_{2i+4}}{4} + \cdots;$$

$$4 \mid d_t, \quad se \quad t \quad \text{é par.}$$

Teorema 3.10. *O número de partições de n com partes 2-distintas é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n.

Representações matriciais para a segunda identidade de Rogers-Ramanujan

A segunda identidade de Rogers-Ramanujan é dada por

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \text{ ou } 3 \bmod 5) = p(n \mid \text{partes são 2-distintas e} > 1).$$

Abaixo enunciaremos as representações matriciais para as partições com partes $\equiv 2$ ou 3 mod 5 e posteriormente em partes 2-distintas e maiores do que 1.

Teorema 3.11. *O número de partições de n em partes congruentes a ± 2 mod 5 é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0;$$

$$c_{2i-1} = 5\frac{d_{2i+1}}{2} + 5\frac{d_{2i+3}}{2} + \cdots ;$$

$$c_{2i} = 5\frac{d_{2i+2}}{3} + 5\frac{d_{2i+4}}{3} + \cdots ;$$

$$2 \mid d_t, \quad \textit{se} \quad t \quad \textit{é ímpar.}$$

$$3 \mid d_t, \quad \textit{se} \quad t \quad \textit{é par.}$$

Teorema 3.12. *O número de partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual que dois e cada parte é maior ou igual a dois é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n.

Observe como essas representações novas para as partições envolvidas nas identidades de Rogers-Ramanujan nos dão novos problemas matemáticos imediatos, levando em consideração o desejo de alguns matemáticos por novas provas dessas identidades. Para obtermos uma nova prova das duas identidades de Rogers-Ramanujan um caminho seria:

- Mostrarmos que a quantidade de matrizes do tipo do Teorema 3.9 é igual à quantidade de matrizes do tipo do Teorema 3.10;
- Mostrarmos que a quantidade de matrizes do tipo do Teorema 3.11 é igual à quantidade de matrizes do tipo do Teorema 3.12;

Novamente não estamos dizendo que contar quantidade de matrizes nas condições dadas seja algo fácil e que matemáticos estão tentando fazer. Nosso objetivo é apenas mostrar como é natural o surgimento de problemas e questionamentos matemáticos.

Como discutido nesta seção, a representação matricial de partições é um tema em destaque da teoria na atualidade. Por meio do surgimento dessas representações ganhamos novas abordagens sobre os problemas já solucionados da teoria, podendo resultar em um melhoramento destes. Além disso, com a representação matricial de partições surge uma nova motivação para a resolução dos problemas que estão em aberto, ou até mesmo novos problemas. Como comentado durante este trabalho, o aprimoramento de resultados utilizando novos conceitos é de grande valia para matemática e é uma prática comum deste meio, uma vez que pode gerar avanços para a teoria ou até mesmo aplicações em outras. Desta maneira, a representação matricial de partições mostra-se um conceito atual e promissor no contexto dos problemas da teoria das partições de inteiros e claro que, não se trata do único tema atual de pesquisa na área. Assim como alguns pesquisadores enxergam inúmeros pontos positivos nessa abordagem, outros têm suas outras direções de trabalho independente dessa representação. Essa variedade de caminhos para desenvolver uma teoria ou até mesmo resolver um problema matemático é absolutamente normal e enriquecedora e deve ser a todo momento incentivada e praticada.

4 Considerações Finais

Muito foi discutido sobre o conceito de problema em matemática e é evidente que a matemática é uma ciência respeitada, principalmente, pelo fato de poder resolver problemas de diversas áreas do conhecimento e do nosso cotidiano. Em contrapartida, este fato contribui muito para a própria matemática, uma vez que é desta maneira que este ramo da ciência mostra-se vital e ganha a chance de ampliar seus horizontes.

Nas palavras de (HILBERT, 2020), enquanto uma ramo da ciência apresentar problemas este mostra-se vivo, já a ausência de problemas é deixar-se morrer. Neste sentido, a matemática mostra-se uma ciência cotada a permanecer pela eternidade, uma vez que a ausência de problemas para esta ciência mostra-se quase que impensável, dado o fato que mesmo os resultados prontos de matemática serem passíveis de melhoramentos. Já através dos problemas em aberto, a matemática tem a possibilidade de aumentar seus horizontes, já que ao resolvermos um problema, ganhamos um novo resultado e diversos outros problemas, aplicações e abordagens.

Pensando em um ambiente escolar, muitos alunos vêem seu interesse pela matemática se esvair por levarem muito tempo para alcançar a resolução de um problema, ou as vezes não conseguindo chegar a nenhum resultado ou chegar a um resultado incorreto. Neste sentido, a abordagem em sala de aula sobre problemas em aberto, ou ao tempo pelo qual muitos problemas permaneceram e permancem na história da matemática sem resposta, pode ser uma forma de amadurecer a ideia nos alunos de que nem sempre a não resolução de um problema matemático ou a demora para se ter êxito representa a não aptidão a esta ciência.

Abordando a temática dos problemas voltados para a teoria das partições de inteiros, ficou claro o quanto a teoria das partições teve seu desenvolvimento a partir de problemas. A busca por uma fórmula para contar as partições de n se deu como um problema que convidou muitos nomes da matemática à teoria, bem como proporcionou grandes avanços a esta, uma vez que estes matemáticos trabalharam tanto na formulação e melhoramento da fóruma de $p(n)$ bem como conjecturaram e propuseram soluções a problemas na teoria. Dentres estes problemas, destacam-se os problemas em forma de identidades, que tem suas soluções principais advindas através do uso de funções geradoras e de provas bijetivas.

Como uma nova forma de abordagem aos problemas da teoria, atualmente, um conceito que tem ganhado destaque é a representação matricial de partições, uma vez que vem contribuindo para o aprimoramento de problemas já solucionados da teoria e para a solução de problemas em aberto, além da criação de novos problemas.

Através do estudos dos problemas de Hilbert e do milênio, podemos tomar conhecimento de alguns problemas em aberto das mais variadas áreas da matemática. O significado de problema em aberto é bastante relativo de pesquisador para pesquisador. Especialmente na teoria das partições, as identidades de Rogers-Ramanujam e a fórmula para $p(n)$ podem ser consideradas para alguns matemáticos problemas em aberto, mesmo com o fato de já terem soluções dadas mediante determinadas abordagens. Porém, soluções dadas a patir de outras abordagens poderiam contribuir para o trabalho de muitos pesquisadores, sendo assim, considerados por estes, problemas em aberto da teoria. Neste sentido, problemas em aberto na teoria das partições surgem a todo o momento, dadas as abordagens requeridas, dadas as especificidades de cada pesquisa. Por conta disto, optamos por não enumerar uma lista de problemas em aberto dos quais poderíamos apresentar aqui como os “clássicos” da teoria, mesmo esta possuindo inúmeros problemas em aberto.

Referências

CARDOSO, D. M. A matemática e os seus problemas. 2006. 6

CARVALHO, J. P. de. Os três problemas clássicos da matemática grega. *II Bienal da SBM (2004)*, 2004. 16

CIÊNCIA, G. *Entenda o enigma das pontes de Konigsberg que instigou a geometria.* 2011. Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>. 10, 11

GERVÁZIO, S. N. *O potencial heurístico dos três problemas clássicos da matemática grega.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015. 15, 17, 18, 19

HILBERT, D. Problemas matemáticos: Conferência proferida no 2º congresso internacional de matemáticos realizado em paris em 1900. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 05–12, nov. 2020. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/267>. 15, 20, 52

IGNÁCIO, P. H. d. O. Semigrupos numéricos e o problema do troco de frobenius. 2019. 10, 13

LUGLI, R. Não precisamos de régua, sim de álgebra e compasso. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014. 19

MANDELBAUM, R. F. *Se você resolver este problema de matemática, você pode roubar todos os Bitcoins do mundo.* 2019. Disponível em: <https://gizmodo.uol.com.br/problema-matematica-roubar-bitcoins/>. 23

MARTINS, V. N.; CHRIST, I. V. Provas bijetivas e funções geradoras no estudo de partições de inteiros. *Revista de Matemática*, v. 2, p. 94–137, 2020. 24, 39, 46

ONO, K. *New Theories Reveal the Nature of Numbers.* 2011. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=aj4FozCSg8g>.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 6, 8, 35

SANTOS, J. P. d. O.; SILVA, R. da. Aspectos combinatórios da teoria aditiva dos números. *Colóquio de Matemática da Regiao Sul*, 2012. 24, 27

SANTOS, J. P. O.; MONDEK, P.; RIBEIRO, A. C. New two-line arrays representing partitions. *Annals of combinatorics*, Springer, v. 15, n. 2, p. 341, 2011. 47

SIMÕES, M. *Ken Ono: Um sujeito de sorte.* 2018. Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2018/05/23/ken-ono-um-sujeito-de-sorte/comment-page-1/>.

WAGNER, A. *Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por meio da Representação Matricial.* Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2016. 47