Resolução - P1 - Álgebra Linear - 02/05/2023

Questão 1:

a) $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow -1L_3}{\overset{L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_2}{\Longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow L_3 - 5L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow -2L_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_1 - 4L_3}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 - 3/2 L_3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 - 3L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\therefore \quad x = 3, \; y = -2, \; z = 2$

$S = \{(3,-2,2)\}$ - Sistema possível determinado

——— // ———

b) $\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 4L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{array}\right)$

$17y = 0 \Rightarrow y = 0$
$13y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\Rightarrow x - 3.0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{(0,0)\}.$

Sistema possível determinado

——— // ———

Questão 2:

Seja $x = \det A$, daí se A for inversível,

$$\boxed{\det A^{-1} = 1/x}$$

De acordo com as operações elementares que são feitas em A para obter B, temos que o determinante de B será:

(i) $-\det A$

(ii) $(-2)^4(-\det A)$

(iii) $-(-2)^4(-\det A)$

Logo $\det B = 16 \det A$, isto é, $\boxed{\det B = 16x}$

Já o determinante da matriz C obtida através de operações elementares em B será:

(i) $\det B$

(ii) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \det B$

Logo $\det C = \frac{1}{16} \det B = \frac{1}{16} \cdot 16x$, isto é,

$\det C = x$ e daí $\det C^t = x$

Como a matriz E é dada por

$$E = A^{-1} \cdot B \cdot C^t,$$

$$\det E = \det(A^{-1} \cdot B \cdot C^t)$$
$$= \det A^{-1} \cdot \det B \cdot \det C^t$$
$$= \frac{1}{\cancel{x}} \cdot 16\cancel{x} \cdot x = 16x.$$

Note que estamos supondo $\det A = x \neq 0$, isto é, A é inversível. Portanto resta calcular $x = \det A$.

$$\det A = 0 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{12} - 1 \cdot \Delta_{13} + 0 \cdot \Delta_{14}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot |A_{12}| - 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot |A_{13}|$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(6+3) - (-2-1) = -27 + 3 = -24$$

Portanto, $\det E = 16x = 16 \cdot (-24) = 384$

—— // ——

Questão 3:

$\mathbb{R}^2$ com as operações dadas não é um $\mathbb{R}$- espaço vetorial, pois note que,

$u = (1,1)$, $v = (2,2)$ são elementos de $\mathbb{R}^2$ e

$u + v = (1+2, 1-2) = (3, -1)$,

mas

$v + u = (2+1, 2-1) = (3, 1)$, isto é,

$u + v \neq v + u$ e portanto não vale a comutatividade.

—— // ——

Questão 4:

a) F.

Contra exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$, $\det B = 1$, logo $\det A + \det B = 2$,

mas $\underline{\det(A+B)} = 0$.

—— // ——

b) F

Contra-exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{mas}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

—————— // ——————

c) V

Note que

$$A^t = (A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = A,$$

logo A é simétrica.

$A^2 = A \cdot A = A \cdot A^t$, pois A é simétrica, logo $A = A^t$.

Daí,

$A^2 = A . A^t = A$, como queríamos mostrar.

—— // ——

d) F

A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Logo, se existir $x \in \mathbb{R}$, tal que $\det A = 0$, então para este x, A não é inversível.

$$\det A = \cancel{x^2} + \cancel{6} + \cancel{2x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{6}$$
$$= 0$$

Como $\det A = 0$, independente da escolha de x real, então A não é inversível para qualquer que seja o valor de x adotado.

Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—— // ——