P1- Álgebra Linear - Turma MA

18/05/2022

Questão 1:

a) Sejam $u=(2,2,2)$, $v=(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e note que:

$u+v=(1,1,1)$ e

$v+u=(-1,-1,-1)$, ou seja

$u+v \neq v+u$, logo $\mathbb{R}^3$ com as operações definidas não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

—— // ——

b) Primeiro note que, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, temos

$$x \oplus 1 = x1 = x \quad \text{e} \quad 1 \oplus x = 1.x = x,$$

logo 1 é o elemento neutro de $\mathbb{R}_+$.

Assim, estamos interessados em determinar $y \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$x \oplus y = 1,$$

isto é,

$$xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x} \text{ é o simétrico de } x.$$

—— // ——

Questão 2:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{11}L_2}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - 7L_2}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2}{\Longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x=3, y=-1, z=2$. $S=(3,-1,2)$

Sistema possível determinado.

—— // ——

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{array}\right) \xRightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3-2L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2-3L_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4z=0 \Rightarrow \boxed{z=0}$

$x+2y-z=3 \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow \boxed{x=3-2y}$

$S=\{(3-2t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$

Sistema possível indeterminado

—— // ——

Questão 3:

$$\begin{cases} x + ky + z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ y + kz = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & k & 1 & -1 \\ 0 & 1-k & -2 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - (1-k)L_3 \\ \Rightarrow \\ L_1 \leftrightarrow L_1 - kL_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-k^2 & -1-k \\ 0 & 0 & -2-k(1-k) & 2-(1-k) \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-k^2 & -1-k \\ 0 & 0 & -2-k+k^2 & 1+k \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

Note que, para $k=-1$ teremos a segunda linha toda nula e da primeira linha teremos $\boxed{x=0}$.

Enquanto da terceira linha teremos $y-z=1$, isto é, $\boxed{y=1+z}$.

Assim a solução do sistema será a reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} ; \quad t\in\mathbb{R}.$$

//

Questão 4:

Seja $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sabemos que

$AB=BA$, qualquer que seja B de ordem 2.

Vamos escolher algumas matrizes B em particular.

• Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $AB = BA$, devemos ter $b = 0$ e $c = 0$.

Assim, A é do tipo $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Vamos escolher outra matriz B para fazer os produtos.

• Para $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ temos

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Como $AB = BA$, devemos ter $a = d$.

Portanto $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, isto é,

$$A = a I_2.$$

Questão 5:

a) (V)

Se AB é simétrica então $(AB)^t = AB$, isto é, $B^t A^t = AB$ e como A e B são simétricas, então $B^t = B$ e $A^t = A$, logo

$$B^t A^t = AB \Rightarrow BA = AB.$$

Reciprocamente, se $AB = BA$, então

$(AB)^t = (BA)^t = A^t B^t = AB$, pois $A^t = A$ e $B^t = B$.

Logo, AB é simétrica.

—— // ——

b) (V)

De fato, dado $k \in \mathbb{R}$, defina a matriz A por

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

daí $f(A) = \det A = k$.

—— // ——

e) (F)

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, logo

$\det AB = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$

—— // ——

d) (F)

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Como $\det A = 1$ e $\det B = 2$ então A e B são inversíveis, mas

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

logo $\det(A+B) = 0$ e portanto $A+B$ não é inversível.

—— // ——