PROVA 3 - Álgebra Linear - 22/12/2022

Questão 1:

a) $T(x,y,z) = (2x-y,\ x+3y-z)$

Sejam $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cdot\ T((x,y,z)+(a,b,c)) &= T(x+a,\ y+b,\ z+c) \\
&= (2(x+a)-(y+b),\ x+a+3(y+b)-(z+c)) \\
&= (2x-y+2a-b,\ x+3y-z+a+3b-c) \\
&= (2x-y,\ x+3y-z)+(2a-b,\ a+3b-c) \\
&= T(x,y,z)+T(a,b,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot\ T(k(x,y,z)) &= T(kx,ky,kz) \\
&= (2kx-ky,\ kx+3\cdot ky-kz) \\
&= (k(2x-y),\ k(x+3y-z)) \\
&= k(2x-y,\ x+3y-z) \\
&= kT(x,y,z)
\end{aligned}$$

—— // ——

b) $\alpha = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ $\qquad [T]^{\alpha}_{\beta} = ?$

$\beta = \{(1,0),(0,2)\}$

$T(1,1,1) = (1,3) = \underline{1}(1,0) + \underline{3/2}(0,2)$

$T(0,1,1) = (-1,2) = \underline{-1}(1,0) + \underline{1}(0,2)$

$T(0,0,1) = (0,-1) = \underline{0}(1,0) + -1/2(0,2)$

Portanto, $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Questão 2:

a) $T(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, z)$

Sejam $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T((x,y,z)+(a,b,c)) &= T(x+a, y+b, z+c) \\ &= (x+a+y+b+c+z, 2(y+b)+z+c, z+c) \\ &= (x+y+z+a+b+c, 2y+z+2b+c, z+c) \\ &= (x+y+z, 2y+z, z) + (a+b+c, 2b+c, c) \\ &= T(x,y,z) + T(a,b,c) \end{aligned}$$

$$\cdot\, T(k(x,y,z)) = T(kx, ky, kz)$$
$$= (kx+ky+kz,\ 2ky+kz,\ kz)$$
$$= k(x+y+z,\ 2y+z,\ z)$$
$$= kT(x,y,z).$$

---

b) $T(1,0,0) = (1,0,0) = \underline{1}(1,0,0) + \underline{0}(0,1,0) + \underline{0}(0,0,1)$

$T(0,1,0) = (1,2,0) = \underline{1}(1,0,0) + \underline{2}(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(0,0,1) = (1,1,1) = \underline{1}(1,0,0) + \underline{1}(0,1,0) + \underline{1}(0,0,1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

c) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$T(x,y,z) = (0,0,0) \iff$

$(x+y+z,\ 2y+z,\ z) = (0,0,0) \implies$

$$\begin{cases} x+y+z = 0 & \implies x = 0 \\ 2y+z = 0 & \implies y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto, $N(T) = \{(0,0,0)\}$

— // —

d) Pelo item anterior, temos que T $\dim N(T) = 0$ e T é injetora.
Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$$
$$3 = 0 + \dim Im(T)$$

Logo, $\dim Im(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, onde $\mathbb{R}^3$ é o contradomínio de T.
Daí, segue que T é sobrejetora.

Como T é injetora e sobrejetora então T é um isomorfismo.

~ // ~

Como T é isomorfismo, existe $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \circ T^{-1} = I$. Logo,

$$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Rightarrow$$
$$T(T^{-1}(x,y,z)) = T(a,b,c) \Rightarrow$$
$$(x,y,z) = (a+b+c, 2b+c, c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c=x \\ 2b+c=y \\ \boxed{c=z} \end{cases} \Rightarrow 2b+z=y \Rightarrow \boxed{b=\frac{y-z}{2}}$$

$$\Rightarrow a+\frac{y-z}{2}+z=x \Rightarrow$$

$$a=x-z-\left(\frac{y-z}{2}\right) \Rightarrow a=\frac{2x-2z-y+z}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{2x-y-z}{2}}$$

Portanto, $T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{2x-y-z}{2}, \frac{y-z}{2}, z\right)$

~ // ~

Sabemos que $[T^{-1}]=([T])^{-1}$.
Vamos calcular $([T])^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_1-L_3 \\ \Rightarrow \\ L_2 \leftrightarrow L_2-L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \Longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2 \\ \Longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Portanto, $[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Questão 3:

a) $T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (2,3,0)$

$T(0,0,1) = (1,1,-1)$

$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

b) $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda I)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

—————— // ——————

c) $p_T(\lambda) = 0 \iff \underbrace{\lambda = 1,\ \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1}_{\text{autovalores}}$

—————— // ——————

d) • $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ y = 0$$

Autovetores: $(x, 0, 0),\ x \neq 0$

• $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 0 \quad , \quad -2x+2y=0 \Rightarrow \boxed{x = y}$

autovetores: $(x, x, 0)$, $x \neq 0$.

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 4y+z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{z = -4y}$ $\qquad 2x + 2y - 4y = 0$

$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow \boxed{x = y}$

autovetores: $(y, y, -4y)$, $y \neq 0$

//

e) Sim, T é diagonalizável pois trata-se de operador de um espaço de dimensão 3 com 3 autovalores distintos. $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,-4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e além disso,

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

//

Questão 4:

a) (F)

Note que, pelo TNI temos

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$$

Como T é sobrejetora,

$$\dim Im(T) = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4,$$

logo teríamos

$$3 = \dim N(T) + 4 \Rightarrow \dim N(T) = -1,$$

o que é um absurdo.

//

b) (V)

$T(1,0) = (-3,-1)$

$T(0,1) = (4,2)$

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = -(3+\lambda)(2-\lambda) + 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2$$

Logo, T possui dois autovalores distintos e é um operador de um espaço de dimensão 2. Portanto, T é diagonalizável.

—— // ——

c) (F) Observe que,

$\dim M_3(\mathbb{R}) = 9$ e

$\dim P_9(\mathbb{R}) = 10$.

Se os espaços fossem isomorfos, eles teriam mesma dimensão.

—— // ——

d) (F) Considere por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 2 = tr(B)$, mas $A \neq B$.

Logo a transf. traço não é injetora.

//