UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 7: Bases e dimensão

(1) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dados dois vetores $u, v \in V$, mostre que eles são linearmente dependentes se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

(2) Considere os espaços vetoriais V dados abaixo munidos das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, responda se $S \subset V$ é um conjunto LI ou LD em V:

(a) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \{(1,1,1), (i, 2i, i), (2,1,2)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,4,9)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,2,3), (2,1,-2), (3,1,1), (4,-1,-2)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,1), (-1,1)\}$.

(e) $V = M_2(\mathbb{C})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(f) $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{x^3 - 5x^2 + 1, 2x^4 + 5x - 6, x^2 - 5x + 2\}$.

(g) $V = P_2(\mathbb{C})$, $S = \{1, x + i, (x+i)^2\}$.

(3) Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ e $S = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \subset \mathbb{K}^3$. S é LI ou LD?

(4) $V = \mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais. Determine uma base e sua dimensão.

(5) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$. $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$? Justifique.

(6) Seja $W = \langle v_1 = (1,-1,0,0), v_2 = (0,0,1,1), v_3 = (-2,2,1,1), v_4 = (1,0,0,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

(a) $(2,-3,2,2) \in W$? Justifique.

(b) Exiba uma base para W. Qual a dimensão?

(c) $W = \mathbb{R}^4$? Por quê?

(7) Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (3,1,1)$, $v_4 = (4,-1,-2)$.

(a) Estes vetores são LD. Justifique.

(b) Expresse o vetor nulo como combinação linear destes vetores, na qual os coeficientes do da combinação não sejam todos nulos.

(8) Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 6y - 4z = 0 \end{cases}$

(a) Se $W \subset \mathbb{R}^3$ é o subespaço solução do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de W.

(b) Se $U \subset \mathbb{R}^3$ é o espaço gerado pelos vetores-linha da matriz de coeficientes do sistema acima, obtenha uma base e a dimensão de U.

(9) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y = 0 \quad \text{e} \quad z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

(a) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $W_1 + W_2$. A soma é direta?

(c) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

(10) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = d \quad \text{e} \quad b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a = c \quad \text{e} \quad b = d \right\}$ subespaços de $M_2(\mathbb{C})$.

(a) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $W_1 + W_2$. A soma é direta?

(c) $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{C})$?

(11) Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$ e W o subespaço de V gerado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encontre uma base e a dimensão de W.

(12) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos seguintes vetores:

$$v_1 = (1, 1, 3, 1), \qquad v_2 = (1, -3, 15, 9), \qquad v_3 = (1, 2, 0, -1).$$

(a) Obtenha uma base para W.

(b) Complete essa base obtida no item (a) até que se tenha uma base para o $\mathbb{R}^4$.

(13) Mostre que $B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e obtenha as coordenadas de $u = (1, 0, 0)$ em relação à base B.

(14) Sejam $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $B_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $B_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Obtenha as matrizes de mudança de base:

(i) $[I]^{B}_{B_1}$

(ii) $[I]^{B_1}_{B}$

(iii) $[I]^{B}_{B_2}$

(iv) $[I]^{B}_{B_3}$

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação as bases b, B_1, B_2 e B_3?

(c) As coordenadas de um vetor u em relação a base B_1 são dadas por $[u]_{B_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quais são as coordenadas de u em relação às bases B, B_2 e B_3?

(15) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, B e B' bases ordenadas de V e seja

$$[I]^{B'}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtenha $[u]_B$, se $[u]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e obtenha $[w]_{B'}$, se $[w]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(16) Seja V o espaço das matrizes triangulares superiores de ordem 2 sobre $\mathbb{R}$ e sejam

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V. Obtennha $[I]^{B}_{B'}$.